

黑洞微观状态，信息佯谬讲义

雷扬

*Kavli Institute for Theoretical Sciences (KITS),
University of Chinese Academy of Sciences, 100190 Beijing, P.R. China*

Contents

1	引言	1
2	黑洞热力学	3
2.1	弯曲时空的量子场论, Unruh效应, 霍金辐射	5
2.2	霍金辐射	8
2.3	黑洞热力学	8
2.4	Euclidean路径积分	10
2.5	BPS黑洞热力学	11
3	黑洞的微观状态数	13
3.1	弦理论的计算	14
3.1.1	超引力中的黑洞解	14
3.1.2	弦论中的微观态	16
3.2	全息原理计算黑洞熵	16
3.3	Kerr黑洞和共形场论对偶	20
4	黑洞信息佯谬	22
4.1	Hawking定理	22
4.2	CHSH计算	26
5	前沿与讨论	30
A	数学基础	31
A.1	Hardy-Ramanujan公式	31
A.2	特殊函数	32
A.3	稳定点近似	33
A.4	求解渐进代数方程	35
B	一些习题解答	35
	参考文献	36

1 引言

在物理学发展历程上, 理论的统一往往能带来更多的认识和发现。一个经典的例子是麦克斯韦通过电磁学理论把电和磁统一起来, 引导人们发现了电磁波等对我们当今生活有重大影响力的物理现象。近一些年的例子有量子电动力学和弱相互作用的统一给我们带来了电弱相互作用理论。当前理论物理的目标是寻找一个能把相对论效应, 量子效应以及引力效应统一起来的量子引力理论。三个效应分别由三个参数来刻画, 分别是光速 c , 普朗克常数 \hbar 以及牛顿引力常数 G_N 。

20世纪发展起来的广义相对论和量子场论正是这些物理效应结合统一的产物，他们分别在研究大质量天体物理和小尺度物理等问题上取得了极大的成功。其中量子场论是量子效应和相对论效应结合的产物，它预言的电子反常磁矩和试验高度吻合。广义相对论也在研究引力波，GPS定位等问题上得到了广泛的应用。理论的大致图像可见图

当引力效应将极大质量的天体压缩近极小尺度中产生的天体就是黑洞。有关黑洞的研究最早可以追溯到拉普拉斯(Laplace)：他在牛顿引力中考虑了存在一类天体的逃逸速度超过光速的问题。从现代的观点看，理解黑洞物理需要研究大质量天体的广义相对论理论以及微观尺度的量子场论。因此黑洞在量子引力中就像量子力学中的氢原子一样重要。

很长一顿时间，人们认为黑洞是一个只进不出的天体。任何物体粒子都不可能逃脱黑洞的引力，包括光。然而霍金(Stephan Hawking)的工作[1]改变了这一看法。研究表明，黑洞视界存在温度为

$$T = \frac{hc^3}{8\pi G_N k M} \quad (1.1)$$

的热辐射。温度刻化的分子平均运动动能，从而霍金的工作表明黑洞视界并非原先认为的“全黑”。

黑洞的热辐射是黑洞热力学理论中的冰山一角。黑洞热力学理论和经典热力学一样，还包含能量 E ，熵 S ，电荷 Q ，化学势 μ 等物理量。热力学描述的是宏观系统的热现象，这些热现象的微观量子起源由统计力学来描述。例如，温度描述的是分子平均运动动能，熵通过玻尔兹曼公式 $S = k \ln d$ 描述的是系统的微观状态数，其中 d 代表的就是微观量子态的数目。在这个意义上，黑洞热力学是连接黑洞的几何和量子理论的桥梁。

对于一般的量子场论描述的系统来说，物态的宏观熵和系统的体积成正比。然而当理论中引入了引力相互作用后，这个规律不再适用¹。贝肯斯坦(Bekenstein)认为，黑洞的熵正比于其视界面的面积而非体积(在自然单位制 $\hbar = k = c = 1$ 下)：

$$S = \frac{A}{4G_N} \quad (1.2)$$

这个标度关系一定程度上启发了全息原理的提出。正如量子统计力学为宏观的热力学系统提供了微观理论解释，理解黑洞熵(1.2)的微观状态起源需要量子引力理论。成功的量子引力理论的试金石是它是否能计算出一个宏观黑洞熵对应的微观量子态。

黑洞表面存在有限的温度意味着黑洞会以热辐射形式蒸发，这个过程被称为霍金辐射。热辐射不包含黑洞中量子态的信息。当黑洞蒸发了全部的质量后，一个困扰了人们多年的问题是：黑洞的信息去哪了？一方面，如果认为黑洞蒸发的过程是由量子力学来描述的，就必须要求该过程满足酉正性(unitary)，也就是说信息是守恒的。然而由于热辐射不携带信息，所以当黑洞完全蒸发之后，信息似乎凭空消失了。这就是信息佯谬问题，它体现出当广义相对论和量子场论进行统一描述时产生的尖锐矛盾。

早期关于黑洞信息佯谬的辩论主要集中在信息是否会在黑洞蒸发过程中丢失，这个辩论持续了很多年。1997年Maldacena提出的全息原理[3]为解决该问题提供了一个

¹相关的综述讨论可见[2]

新思路。全息原理认为：一个在AdS时空中的引力理论和其边界上的共形场论完全等价。在这个框架下，AdS黑洞的微观状态由边界量子场论描述，引力中的蒸发过程也应该可以等价于边界量子场论的演化过程，从而它意味着黑洞蒸发过程是信息守恒的。从而这为人们理解量子引力提出了进一步问题：霍金关于黑洞热辐射的计算究竟错在哪里？我们需要如何从引力理论中理解黑洞蒸发过程是信息守恒的。回答这个问题可能需要对量子引力理论发展出全面的理解。但我们仍然希望半经典引力计算能给我们带来定性的物理图像。

鉴于上述原因，理解黑洞熵的微观状态数将有助于我们构造黑洞的量子化理论，从而理解霍金的半经典计算的漏洞：在量子场论中如何得出信息不守恒的结论？当然直到现在，我们依然没有完全理解一个量子引力理论的完整图像。其困难来源于很多方面。本讲义的目标是为理解黑洞熵(1.2)的微观状态起源提供启发性地介绍。我们在第2节将介绍黑洞热力学的性质。为了让读者更好理解(1.1)以及(1.2)确实有其热力学含义，我们将使用一些弯曲时空中的量子场论的理论知识。关于这方面的好的综述可见[4-6]。在第3节中，我们将从弦理论，全息原理以及Kerr/CFT对偶三个方面介绍如何从量子场论中得到黑洞的熵。在第4节中，我们会讨论和计算黑洞微观状态直接相关的信息佯谬问题。由于篇幅以及课程安排限制，本讲义无法覆盖信息佯谬的各个方面。本暑期学校的其它课程会做更详细的介绍。

在每一个章节末，将会有一些习题供学生思考。

习题

1. 利用量纲分析，检验在国际单位制 $k, \hbar, c \neq 1$ 下黑洞熵的表达式：

$$S = \frac{kAc^3}{4G_N\hbar} \quad (1.3)$$

2. 估算如果太阳变成黑洞，其对应的霍金温度以及其对应的黑洞熵。

2 黑洞热力学

人们找到的爱因斯坦方程组里的第一个黑洞解是Schwarzschild解：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.1)$$

度规的系数在 $r = 2M$ 和 $r = 0$ 处都是发散的，这意味着该坐标在这两个面上不能很好的描述真正的物理。由于度规本身是坐标依赖的，因此这些奇异点出现有可能来自于理论选择了不恰当的坐标。检验一个奇异点是坐标奇异点还是物理奇异点的简单办法是检查其它的曲率不变量是否是有限的。例如

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.2)$$

我们可以看出 $r = 2M$ 处的曲率是有限的而 $r = 0$ 的曲率是发散的。

既然 $r = 2M$ 是几何的坐标奇异，那么我们可以通过选择合适的坐标系来移除这个奇异点。一个选择是Eddington-Finkelstein坐标：定义

$$u = t + r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad v = t - r - 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (2.3)$$

在 (v, r) 坐标里， $r = 2M$ 就不再是度规的奇异点，而是

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.4)$$

Schwarzschild度规(2.1)只能描述视界之外 $r \geq 2M$ 的时空区域，但这并不意味着时空区域只包括视界之外的部分。通过引入新的坐标例如Eddington-Finkelstein坐标，度规(2.4)被延拓到包括黑洞的时空区域。完整的时空区域可以使用Kruskal坐标描述，其定义为：

$$\begin{aligned} u' &= e^{\frac{u}{4M}} = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r+t}{4M}} \\ v' &= e^{-\frac{v}{4M}} = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r-t}{4M}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

在这个坐标下，Kruskal几何是

$$ds^2 = - \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} du' dv' + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.6)$$

视界落在 $u'v' = 0$ 而 $u'v' = -1$ 是物理的奇异点。

在新的坐标系下，视界 $r = 2M$ 是光滑的，一个自由落体的观察者可以不受阻碍地通过视界，但这并不意味着在视界上没有新的物理。对于一个无穷远的观察者来说，视界是和他有时空因果关联区域的边界。为了更好地理解视界的物理，我们可以考虑近视界面极限下的度规。为了不失一般性，我们把度规中的黑化(blackening)因子记为 $f(r)$ 。在上述的Schwarzschild解中，

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (2.7)$$

这样一般的静态黑洞可以写为

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.8)$$

其中我们用 $d\Omega^2$ 代表其它的时空方向。我们记 r_+ 为 $f(r)$ 的最大的正实根，它代表的黑洞的外视界半径²。我们定义新的径向坐标为

$$r = r_+ + \frac{f'(r_+)}{4} \rho^2 \quad (2.9)$$

近视界面的极限定义为 $\rho \rightarrow 0$ ，从而度规变成

$$ds^2 = \left(-\frac{f'(r_+)^2}{4} \rho^2 dt^2 + d\rho^2 \right) + r_+^2 d\Omega^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (2.10)$$

²对于复杂的带电荷黑洞来说，可能存在内视界。

在这个系统中 (ρ, t) 和其它空间方向脱耦合，从而时空度规变成了局部的Rindler时空和其它时空方向的直积。我们将在后文用到这个性质。

对于极端黑洞来说，近视界面极限的度规不再是Rindler时空，而是AdS₂时空，这对用熵函数或者Kerr/CFT对偶来计算黑洞熵至关重要。具体计算可见习题。

2.1 弯曲时空的量子场论，Unruh效应，霍金辐射

在我们理解一个新的理论时，时常会用一些我们熟悉的概念来帮助我们理解新的事物。这也许会为理解新的模型提供一些思路，但也有可能导致一些理论和客观事实不符的情况出现。一个例子是我们在量子力学出现之前尝试理解氢原子的时候，由于电磁力和引力都是和中心距离满足平方反比率，我们假设了电子会绕原子核在特定轨道上做运动，就像地球绕太阳的公转。在量子力学出现之后，人们意识到经典的轨道图像并不完全适用于微观粒子，从而放弃了经典轨道的概念。粒子的自旋的概念也是如此。

在考虑弯曲时空的量子场论时，粒子数也不再是一个良好定义的物理概念。这是弯曲时空量子场论区别于平直时空(Minkowski时空)量子场论的一个主要特性。事实上，Minkowski时空由于有Poincare对称性的存在，理论中存在着类时的Killing矢量，从而依据此可以选择在Lorentz变换下不便的真空态。粒子的产生可以通过将正能模式作用在真空态上得到。不同的正能模式之间存在Lorentz变换的对称性，由于真空是Lorentz变换不变的，因此在Minkowski时空中的量子场论粒子数可以被唯一确定。因此粒子数在该理论中是一个物理观测量。

一般的弯曲时空不存在类时的Killing矢量，从而对于不同的正能模式有不同的真空选择。由于没有这样的对称性，从而没有统一的粒子数的概念描述。一个真空态在另一个正能模式决定的真空态看来可能是一个有很多粒子的激发态。Unruh效应就是这个物理现象的一个具体模型体现。

我们首先依循Minkowski时空中的量子场论来考虑在弯曲时空中的自由标量场

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.11)$$

对应的Klein-Gordon方程是

$$\square \phi - m^2 \phi = 0 \quad (2.12)$$

假设 $f_i(x_\mu)$ 是方程(2.12)的一组正交完备解，那么所有的解就可以在 f_i 的基底下展开：

$$\phi = \sum_i \mathbf{a}_i f_i + \mathbf{a}_i^\dagger f_i^* \quad (2.13)$$

谐振子算符 \mathbf{a}_i 满足

$$[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.14)$$

理论的真空态定义为被所有湮灭算符作用后都为零的物理态

$$\mathbf{a}_i |0\rangle = 0 \quad (2.15)$$

在这个表象下，通过粒子数标记的量子态记为

$$|n_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (\mathbf{a}_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle \quad (2.16)$$

相应的粒子数算符是

$$n_i = \mathbf{a}_i^\dagger \mathbf{a}_i \quad (2.17)$$

直到目前为止，所有的构造弯曲时空量子场论的理论工具完全和Minkowski时空中的量子场论一致。

然而方程(2.12)可能存在其它的完备正交解 $g_i(x_\mu)$ 。这些完备正交解和 $f_i(x_\mu)$ 之间通过变换系数矩阵 α_{ij}, β_{ij} 联系：

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^*), \quad g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*) \quad (2.18)$$

从而任意一个场存在不唯一的展开式

$$\phi = \sum_i \mathbf{a}_i f_i + \mathbf{a}_i^\dagger f_i^* = \sum_i \mathbf{b}_i g_i + \mathbf{b}_i^\dagger g_i^*$$

变换(2.18)在文献中被称为Bogoliubov变换。其中变换系数满足

$$\sum_j (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} \quad (2.19)$$

如果把标量场 ϕ 在基底 $g_i(x_\mu)$ 下的展开谐振子系数记为 \mathbf{b}_i ，那么Bogoliubov变换同样也可以作用在谐振子上：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \sum_j (\alpha_{ji} \mathbf{b}_j + \beta_{ji}^* \mathbf{b}_j^\dagger) \\ \mathbf{b}_i &= \sum_j (\alpha_{ij}^* \mathbf{a}_j - \beta_{ij} \mathbf{a}_j^\dagger) \end{aligned} \quad (2.20)$$

从而这确定了真空 $|0\rangle$ 在 $g_i(x_\mu)$ 基底下的粒子数为

$$\begin{aligned} \langle 0_f | n_{\mathbf{b}_i} | 0_f \rangle &= \langle 0_f | \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_i | 0_f \rangle \\ &= \sum_j \beta_{ij} \beta_{ij}^* \end{aligned} \quad (2.21)$$

Unruh效应

Unruh效应说明的是一个加速度为 a 的参考系里的观察者在Minkowski时空的真空可以观察到温度为

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad (2.22)$$

的粒子群。由于温度的概念只对大量粒子适用，这个结论意味着即使在真空态，一个加速度观察者也可以观察到大量粒子。Unruh效应是弯曲时空量子场论的直接结论。为了理解这一点，我们需要找到解空间的类似于 f 和 g 的两组完备正交基底。正如上文所讨论的，Minkowski时空的类时Killing矢量 ∂_t 为理论选择了唯一的真空态。换句

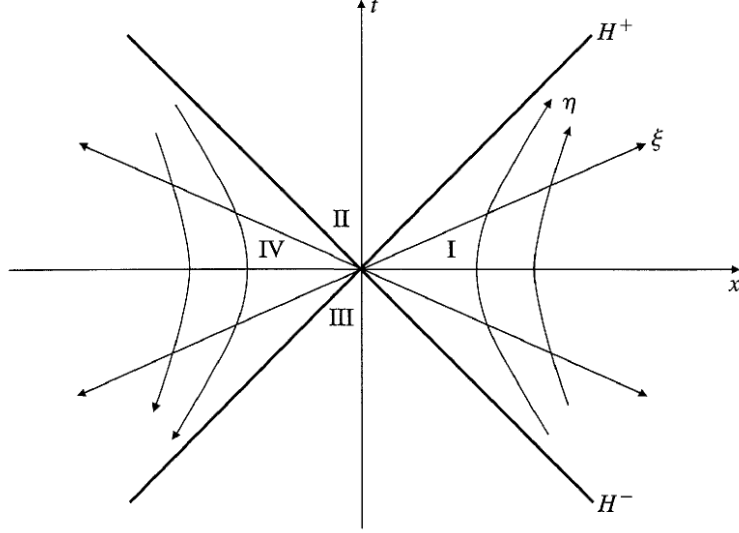


Figure 1: Rindler spacetime

话说，时间坐标的选取决定了真空态以及其正能模式 f 。因此求解两组完备正交基底等效于选择两个不同的时间坐标。

为了简便起见，考虑二维Minkowski时空：

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (2.23)$$

我们可以证明，一个加速度为 a 的参数曲线是：

$$t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau), \quad x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau) \quad (2.24)$$

从而为了让常加速度对应于某个新坐标的常数值，我们可以做如下坐标变换

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta), \quad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \quad |t| < x \quad (2.25)$$

从坐标变换(2.25)可以看出常数 X 正对应着常加速度。我们从(2.25)获得的正是Rindler度规

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) \quad (2.26)$$

Rindler时空(2.26)和Minkowski时空(2.23)决定了不同的正能模式。从而他们之间的Bogoliubov变换系数可以通过模式之间的变换求解。坐标(2.25)适用于Rindler时空的右半区域 其镜像的左半时空区域的坐标会发生符号转变，从而定义为

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta), \quad x = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \quad x < |t| \quad (2.27)$$

符号转变是因为在左边时空区域中指向未来类时方向是向下的。

在Rindler时空中的Klein-Gordon方程是

$$\square\phi = e^{-2a\xi} (-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2)\phi = 0 \quad (2.28)$$

这个方程的解显然包括平面波。由于时空坐标在左右半区定义有所区别，我们定义如下的模式

$$\begin{aligned} g_k^{(1)} &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta+ik\xi} & \text{Right} \\ 0 & \text{Left} \end{cases} \\ g_k^{(2)} &= \begin{cases} 0 & \text{Right} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega\eta+ik\xi} & \text{Left} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中 $g_k^{(2)}$ 指数上符号的改变正是由于未来指向方向不同。从而我们可以知道这些模式在Minkowski时空中，在右半部分为

$$g_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta+ik\xi} = a^{\frac{i\omega}{a}} (x-t)^{\frac{i\omega}{a}} \quad (2.30)$$

而在左半部分为

$$g_{-k}^{(2)*} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta+ik\xi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} a^{\frac{i\omega}{a}} e^{\frac{\pi\omega}{a}} (-t+x)^{\frac{i\omega}{a}} \quad (2.31)$$

由于 $g_k^{(1)}$ 和 $g_k^{(2)}$ 定义在互补的时空区域上，我们可以验证如下的组合是在全时空平面上良好定义的：

$$h_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} \left(e^{\frac{\pi\omega}{2a}} g_k^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} g_{-k}^{(2)*} \right) \quad (2.32)$$

方程(2.32)定义了在全时空平面上两组完备基底之间的Bogoliubov变换。因此我们可以从该式中读出Bogoliubov变换系数 β_{ij} ，从而可以得到

$$\langle 0_M | n_R | 0_M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \quad (2.33)$$

这意味着温度的导数为 $\beta = \frac{2\pi}{a}$ 。这正是我们的Unruh效应的温度。

2.2 霍金辐射

由于在非极端黑洞的近视界面极限的几何正是Rindler时空，我们可以预见霍金辐射产生机制和Unruh效应是一致的。这是因为根据广义相对论的等效原理，我们可以将黑洞表面的引力视为等效的加速度。我们记 κ 为黑洞的表面引力，它的定义是：给定Killing视界面上的Killing矢量 ξ^μ ， ξ^μ 与视界面正交，从而

$$\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = -\kappa \xi^\nu \quad (2.34)$$

对于Schwarzschild黑洞， $\kappa = \frac{1}{4M}$ ，从而我们可以获得霍金辐射的温度(1.1)。

2.3 黑洞热力学

最早的黑洞热力学理论是有Berenstein发起的。他受到导师惠勒(Wheeler)的启发，考虑了热力学第二定律对于存在黑洞的时空来说应该如何理解的问题。换句话

说，我们如果需要给黑洞定义一个物理的熵，有什么黑洞的物理量是在某些条件下单调递增的？首先黑洞的质量不符合这一要求，原因是Kerr黑洞存在着可以提取能量的能层。通过提取能量过程可以让黑洞的质量下降。霍金证明的面积定理[7]为这个问题提供了一个可选的答案。面积定理说的是：如果黑洞视界面之外没有裸奇点，并且能量动量张量满足零能条件，即对任意零向量 k^μ 满足 $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ ，则黑洞视界面面积是单调递增的。

在面积定理的启发下，Berenstein认为黑洞的熵正比于视界面面积。但是他并不能确定正比系数。它仅仅描述了在黑洞视界面的部分的经典动力学。热力学第零定律和第一定律分别描述的是平衡和准平衡过程。

- 黑洞热力学第零定律：静态黑洞的视界面上表面引力是常数。
- 黑洞热力学第一定律：转动角动量为 J ,电荷 Q 的黑洞满足[8]:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (2.35)$$

其中 M 是黑洞的ADM质量。若理论存在其它的耦合参数，新的耦合参数都可以视为新的守恒荷加入到热力学第一定律中。例如高阶导数项Gauss-Bonnet项。详细理论可参考Lovelock引力[9]。

我们以Kerr黑洞为例。在Boyer-Linguist坐标系下，Kerr黑洞解为

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta}{\rho^2}(d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\phi})^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}((\hat{r}^2 + a^2)d\hat{\phi} - a d\hat{t})^2 \\ & + \frac{\rho^2}{\Delta}d\hat{r}^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ \Delta = & \hat{r}^2 - 2M\hat{r} + a^2, \quad \rho^2 = \hat{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.36)$$

容易从视界面面积计算出黑洞的熵为

$$S = 2\pi M r_+ = 2\pi M(M + \sqrt{M^2 - a^2}) \quad (2.37)$$

角动量由Komar积分定义，其值为 $J = aM$ 。此外黑洞的角速度定义为视界面上的角速度

$$\Omega = -\frac{g_{t\hat{\phi}}}{g_{\hat{\phi}\hat{\phi}}}\Big|_{r=r_+} \quad (2.38)$$

可以验证热力学第一定律 $TdS = dM - \Omega dJ$ 是满足的。

作为初学者，我们需要明确的是我们应该做什么计算来验证热力学第一定律。在(2.35)中，能量 M ，熵 S 等热力学状态参数都以全微分形式出现。我们知道如果一个多元函数记为 $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ，则全微分为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k$$

当然函数的自变量选取不是唯一的。如果选取另一组自变量 y_1, \dots, y_k ，全微分则可以写为

$$df = \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}dy_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_k}dy_k$$

这样的变换在自变量之间的变换非简并的条件下总是存在的。

在Kerr黑洞度规(2.36)中，我们可以选择 (S, J) 为独立的自变量来验证热力学第一定律，也可以使用参数 (r_+, a) 作为自变量来验证。对于后者，我们可以验证类似于如下关系：

$$T \frac{\partial S}{\partial r_+} - \frac{\partial M}{\partial r_+} + \Omega \frac{\partial J}{\partial r_+} = 0 \quad (2.39)$$

这两种参数化办法本质上不会有太多差别。然而对于一些更加复杂的黑洞解，例如Kerr-AdS黑洞[10]， Minimal gauged supergravity黑洞[11]，以及 $U(1)^3$ gauged超引力理论的黑洞[12]，使用Boyer-Linguist坐标将会极大简化度规的形式。并且如果使用 r_+ 以及Boyer-Linguist坐标系的转动参数 a 来表示热力学量似乎会比其它参数化简便很多，能避免很多不必要的根号表示。这也许和Boyer-Linguist坐标是Kerr-AdS黑洞非对角元最少的一种坐标系有关。

2.4 Euclidean路径积分

对于任意的稳态黑洞解，更简单的获得霍金温度的办法是考虑其度规在Euclidean指标下近视界面几何的光滑性。考虑黑洞解(2.8)的Euclidean变换: $t \rightarrow i\tau$

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.40)$$

它对应的近视界面度规是：

$$ds^2 = \left(\frac{f'(r_+)^2}{4} \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 \right) + r_+^2 d\Omega^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (2.41)$$

度规(2.41)仅当 $\tau \sim \tau + \frac{4\pi}{f'(r_+)}$ 时，才在 $\rho = 0$ 处是非奇异的。因为当这个周期条件满足时， (ρ, τ) 可以通过坐标变换变成直角坐标系描述的平直时空。而如果该周期条件不满足，时空中就会存在锥形奇异点(conical singularity)。

事实上，在时间虚方向的周期性正好反映的是场论的热性质，这个转换关系被称为KMS条件。

在Euclidean指标下，我们可以利用Euclidean路径积分这个强有力的工具来证明黑洞熵和视界面面积之间的联系。正则系综的引力理论的配分函数定义为对所有满足时间方向周期性质的黎曼几何求和

$$Z[\beta] = \int d[g_{\mu\nu}] e^{-I[g_{\mu\nu}]} \quad (2.42)$$

这里 I 是引力理论的经典作用量。由于我们没有一个完整的量子引力理论，该表达式只是形式上对所有可能的满足条件几何构型积分。但是我们可以做如下的假设，至少在半经典近似下，配分函数的最主要的部分由我们已知的稳定点近似所贡献。(我们将会在附录中解释稳定点近似背后的数学知识。)从而我们用满足边界条件的Euclidean几何来估算 I 或者 $\ln Z$ 的值：

$$\ln Z[\beta] \sim -I_s \quad (2.43)$$

配分函数和熵满足

$$Z = e^{-\beta\langle E \rangle + S} \quad (2.44)$$

从而我们可以计算出熵为

$$S = \beta \langle E \rangle + \ln Z \approx \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta} - 1 \right) I_s \quad (2.45)$$

因此我们的问题转化成为如何在引力理论中计算 I_s 。

霍金和Gibbons意识到引力作用量的主要部分除了定义在空间体积部分的Einstein-Hilbert作用量之外，还需要考虑边界项。该项被称为Gibbons-Hawking边界项[13]。

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^d x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^{d-1} y \sqrt{-h} K \quad (2.46)$$

$K = h^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu$ 是边界的外曲率， n_μ 是正交于边界的法向量， $h_{\mu\nu}$ 是边界上的诱导度规，定义为 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$ 。如果我们在平直时空计算作用量，可以发现Einstein-Hilbert体积项的贡献为零。以Schwarzschild黑洞为例。Schwarzschild黑洞是真空Einstein方程 $R_{\mu\nu} = 0$ 的解。从而通过指标缩并我们可以得到 $R = 0$ 。而边界项的贡献正比于视界面面积。这是因为通过分部积分法

$$\int_{\partial M} d^{d-1} y \sqrt{-h} K = - \frac{\partial}{\partial n} \int_{\partial M} d^{d-1} y \sqrt{-h} \quad (2.47)$$

在近视界面极限下，我们可以用径向方向替代 ∂_n ，也就是

$$\int_{r=r_++\epsilon} d^{d-1} y \sqrt{-h} = 2\pi\epsilon A \quad (2.48)$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial n} \int_{\partial M} d^{d-1} y \sqrt{-h} = 2\pi A \quad (2.49)$$

这意味着在壳的Euclidean作用量为

$$I_s = - \frac{A}{4G} \quad (2.50)$$

将(2.50)代入(2.45)，我们就可以获得Bekenstein-Hawking熵。从而这解释了为什么熵正比于视界面面积。由于这个推导不依赖于度规具体形式，它揭示了热力学和几何之间的普适关系。

2.5 BPS黑洞热力学

在弦理论中，我们只能通过计算超对称场论的微观态来理解对偶的引力理论中黑洞的微观状态数。从而我们需要理解在超对称极限下黑洞热力学应该如何构建。我们需要小心区分满足超对称的黑洞解和BPS黑洞。当我们说超对称黑洞时，我们仅仅要求黑洞满足BPS超对称条件：

$$E = \sum J_i + \sum Q_I \quad (2.51)$$

然而仅仅满足超对称条件的黑洞解可能是裸奇点解。另一方面极端黑洞的条件是黑洞有简并的视界面，也就是内视界面和外视界面重合。这意味着黑洞有 $T = 0$ 的温度。这一般并不能保证超对称条件的满足。*BPS*黑洞指的是同时满足超对称条件在本节中，我们要介绍*BPS*极限下的黑洞热力学关系。本节可参考的文献是[14]。

在系综中微观状态的信息编码在配分函数 Z 里。然而配分函数的超对称极限并非简单地要求 $\beta \rightarrow \infty$ 。事实上 $\beta \rightarrow \infty$ 仅仅保证了系综的温度为零，而并不一定保证*BPS*条件(2.51)的满足。事实上，我们定义的*BPS*极限为在 $\beta \rightarrow \infty$ 条件下，满足一些和化学势相关的组合的极限。为了理解这个问题，我们来看一个简单的例子。

$\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills理论中的SU(2) subsector里面的基态由 J 个标量算符 Z 生成。标量 Z 满足 $E = J = 1$ 。其中twisted sector的基态由算符 Z^J 生成，这构成了一个长度为 J 的自旋链(spin chain)。我们定义在这个系综中的配分函数为

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta E - \beta \Omega J} \\ &= \sum e^{-\beta(E-J) - \beta(1-\Omega)J} \end{aligned} \quad (2.52)$$

为了让配分函数在 $\beta \rightarrow \infty$ 是良好定义的，我们只有满足如下条件的物理态才会对配分函数产生非平凡贡献：

- $E = J$
- $\beta(1 - \Omega)$ 在 $\beta \rightarrow \infty$ 极限有限。

对于黑洞解，其*BPS*极限常常具有如下性质：

$$E \rightarrow E_{\text{BPS}} + \mathcal{O}(\beta^{-2}), \quad J \rightarrow J_{\text{BPS}} + \mathcal{O}(\beta^{-2}), \quad Q \rightarrow Q_{\text{BPS}} + \mathcal{O}(\beta^{-2}) \quad (2.53)$$

而对应的热力学共轭量在 $\beta \rightarrow \infty$ 极限为

$$\Omega \rightarrow \Omega_{\text{BPS}} - \frac{\omega}{\beta} + \mathcal{O}(\beta^{-2}), \quad \Phi \rightarrow \Phi_{\text{BPS}} - \frac{\phi}{\beta} + \mathcal{O}(\beta^{-2}) \quad (2.54)$$

黑洞时空在*BPS*条件下的转动角速度 $\Omega_{\text{BPS}} = 1$ ，意味着视界面的转动速度为光速。在量子场论中，*BPS*条件常常代表着系统能量的下界。在黑洞时空中，违反*BPS*条件意味着黑洞时空出现裸奇点，从而违反宇宙监督者假设。从而我们的量子统计关系可以被写为

$$\begin{aligned} I &= \beta(E_{\text{BPS}} - \Omega_{\text{BPS}}J_{\text{BPS}} - \Phi_{\text{BPS}}Q_{\text{BPS}}) + \omega J_{\text{BPS}} + \phi Q_{\text{BPS}} - S_{\text{BPS}} \\ &= \omega J_{\text{BPS}} + \phi Q_{\text{BPS}} - S_{\text{BPS}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

习题

1. 考虑极端黑洞(2.8)度规满足

$$f(r_+) = f'(r_+) = 0 \quad (2.56)$$

计算其近视界面极限的度规。

2. (Difficult!)考虑AdS时空的黑洞，计算其作用量 I_s .

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{\ell^2}, \quad M = \frac{r_+}{2} + \frac{r_+^3}{2\ell^2}$$
(2.57)

提示:

- 计算时需要扣除AdS时空背景的贡献，这一项是发散的。

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} (R + \frac{6}{\ell^2}) + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3y \sqrt{-h} (K - K_0)$$
(2.58)

- 在这个计算中，边界项的贡献是0。
- 体积项也是发散的。所以需要合适地定义AdS背景时空的时间方向的周期。
- 最后结果是

$$I = \frac{\pi r_+^2 (\ell^2 - r_+^2)}{\ell^2 + 3r_+^2}$$
(2.59)

3 黑洞的微观状态数

对于一个宏观系统来说，熵和微观状态数之间的关系由玻尔兹曼方程决定： $S = k \ln W$ 。这在理解黑洞理论中带来了许多困惑：黑洞无毛定理表明黑洞的信息只由有限多个守恒荷(能量，角动量，电荷)决定。然而Bekenstein黑洞熵的公式表明黑洞具有极大的熵，绝非几个守恒荷可以解释。因此一直以来量子引力需要回答的一个问题是：黑洞熵的微观解释是什么？我们是否能从量子场论中计算出黑洞熵的来源？

要从量子引力理论例如弦理论推导一般黑洞熵是很困难的。但是我们可以选择一些可计算模型来检验我们的候选理论是否能正确的给出宏观黑洞热力学的计算结果。目前我们已经发展出了很多技术来计算各种黑洞的模型，但是这些技术都有一些局限性，我们来一一说明。

首先是我们要选择什么模型？黑洞熵反应的是视界面的信息，而和无穷远的观察者关系不大。因此黑洞的渐进边界是AdS还是dS还是平直时空不会影响黑洞熵的计算。AdS/CFT作为全息原理的一个经过大量检测的模型，为研究AdS黑洞熵提供了很有效的计算工具。从而我们可以专门考虑AdS时空的黑洞。其次，AdS/CFT描述的强弱耦合对偶，强耦合的场论对偶于弱耦合的引力计算。由于我们缺少计算强耦合理论的有效工具，我们只能期待能够从弱耦合场论计算中预测强耦合场论的信息，而后者正是理解黑洞物理的理论有效区域。然而由于量子修正，重整化等各种复杂因素存在，大多数弱耦合的计算并不能很好地反映强耦合的物理。为此对于某些特殊的模型例如 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills理论，我们只能考虑满足超对称条件的黑洞。我们可以通过在自由极限下计算场论中的超对称共形指标来预测黑洞物理。超对称由于对称的保护特性，不会受到量子修正。并非所有的超对称场论都能用于计算黑洞熵。如果理论中保留的超对称太多，可能有效的引力理论不会形成有有限视界面面积的

黑洞。例如在超弦理论中我们需要足够的膜结构来生成一个有限视界面的黑洞，例如D1-D5-P或者F1-NS5-P的视界面面积是有限的，它们保留了1/8的超对称不破坏；而保留了1/2超对称的F1-P束缚态不存在视界面面积非零的黑洞解。在AdS₅/CFT₄理论中，已知的AdS₅黑洞只存在1/16-BPS的解[15]。

最后了解黑洞微观状态数实际上为信息佯谬问题提供了一个间接的答案：既然黑洞熵确实存在量子场论的微观状态解释，那么黑洞蒸发过程也一定是酉正的。只是我们不理解霍金关于黑洞辐射谱为热谱的计算需要做什么修正；或者说如何从引力的计算中理解这个现象。

3.1 弦理论的计算

3.1.1 超引力中的黑洞解

第一个通过弦理论理解黑洞熵的计算是1996年由Vafa和Strominger给出[16]。我们在本文中考虑的第一个计算模型是弦论中的F1-NS5-P膜形成的束缚态，本部分基于Mathur的讲义[17]。

考虑闭弦理论中包含度规， B -场以及Dilaton的低能有效理论。该超引力的作用量的玻色部分是：

$$S = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12}(dB)^2 \right] \quad (3.1)$$

我们可以验证，它的一个解是

$$ds^2 = H_1^{-1}[-dt^2 + dy^2 + K(dt + dy)^2] + H_5 \sum_{i=1}^4 dx_i^2 + \sum_{a=1}^4 dz_a^2 \quad (3.2)$$

$$e^{2\Phi} = \frac{H_5}{H_1}, \quad H_1 = 1 + \frac{Q_1}{r^2}, \quad H_5 = 1 + \frac{Q_5}{r^2}, \quad K = \frac{Q_p}{r^2}$$

度规(3.2)保留了理论的1/8的超对称。度规(3.2)在 $r = 0$ 处视界面面积是有限的。其原因是多方面的。考虑该理论的11维M理论的图像，其中M2膜绕在第11维坐标 x_{11} 上。首先由于F1弦或者M2膜在其Worldvolume方向存在张力，在这些方向的闭环会受到这些张力的挤压而趋向于收缩成点。另一方面，为了平衡这种力，理论中进一步引入了M5膜，并把M5膜放在 x_{11} 的横向方向，从而它趋向于膨胀。两种力的抵消保证了稳定的BPS束缚态存在。这一点也可以从dilaton场 Φ 在视界面 $r = 0$ 处是个常数看出来。

为了计算视界面的面积，我们注意到视界面由三个部分直乘： y 坐标， x_i 的 S^3 紧致部分以及 T^4 的体积部分。从而

$$A_{\text{string}} = A_{S^3} A_y A_{T^4} \quad (3.3)$$

S^3 的半径在 $r = 0$ 是 $\sqrt{Q_5}$ ，这是因为

$$H_5 dx_i^2 = H_5 (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \rightarrow Q_5 \left(\frac{dr^2}{r^2} + d\Omega_3^2 \right) \quad (3.4)$$

从而

$$A_{S^3} = 2\pi^3 Q_5^{\frac{3}{2}} \quad (3.5)$$

类似的我们可以计算 y 方向的 S^1 的周长是

$$A_y = (2\pi R) \sqrt{\frac{K}{H_1}} \rightarrow 2\pi R \sqrt{\frac{Q_p}{Q_1}} \quad (3.6)$$

最后考虑 T^4 部分，我们将其体积记为 $(2\pi)^4 V$ 。因此

$$A_{\text{string}} = (2\pi^2)(2\pi R)(2\pi)^4 V \sqrt{\frac{Q_p}{Q_1} Q_5^3} \quad (3.7)$$

需要注意的是，(3.7)并非引力理论中计算的几何视界面面积。注意到超引力作用量(3.1)的Ricci标量部分有和dilaton相关的因子，这意味着我们的度规(3.2)是在弦参考系下的表达式。为了计算其几何视界面面积，我们需要转换到Einstein参考系，也就是说通过对度规的重新定义将dilaton场从Ricci标量的系数中消去。从而对应的Einstein参考系的度规是

$$g_{ab}^E = e^{-\frac{\Phi}{2}} g_{ab}^S \quad (3.8)$$

从而在Einstein参考系里视界面的面积是

$$A^E = \frac{Q_1}{Q_5} A_{\text{string}} = (2\pi^2)(2\pi R)(2\pi)^4 V \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p} \quad (3.9)$$

另一方面，10维超引力解(3.1)存在着5个紧致化维度 $T^4 \times S_y^1$ 。我们通过紧致化操作可以获得5维渐进平直时空的黑洞。视界面面积中 $(2\pi R)(2\pi)^4 V$ 的因子正是这5维紧致化维度的体积。从而10维的Newton引力常数和5维引力常数联系是：

$$G_{10} = G_5 (2\pi R)(2\pi)^4 V \quad (3.10)$$

从而黑洞熵可以被写成

$$S = \frac{(2\pi)^2 \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p}}{4G_5} \quad (3.11)$$

最后注意到 Q_1, Q_5, Q_p 只是引力理论中膜或者弦所携带的规范荷。可以理解的是，这些荷和F1弦的数量 n_1 ，NS5膜的数量 n_5 以及动量的自由度 n_p 有直接正比关系，也就是说单个膜携带规范荷数量是一定的，从而膜数量越多，电荷越大。由于我们想把黑洞熵和共形场论中计算简并度的结果直接对比，而后者是一个数数的工作，因此我们更倾向于将黑洞熵写成和整数 n_1, n_5, n_p 直接相关的公式。

略去弦论的细节(可见[18],需要考虑规范场的积分以及膜的张力常数等因素)，参数 Q_1, Q_5, Q_p 和整数的关系是

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{g^2 \alpha'^3}{V} n_1 \\ Q_5 &= \alpha' n_5 \\ Q_p &= \frac{g^2 \alpha'^4}{V R^2} n_p \end{aligned} \quad (3.12)$$

而10维的Newton引力常数和弦耦合常数关系是 $G_{10} = 8\pi^6 g^2 \alpha'^4$ ，从而最后的黑洞熵为

$$S = 2\pi \sqrt{n_1 n_5 n_p} \quad (3.13)$$

3.1.2 弦论中的微观态

从熵(3.13)的表达式可以看出如果任何一个整数为零也就是说缺少了弦,NS5膜或者动量任何一个成分都会使得黑洞熵为零。为了理解这一点,我们先考虑只有F1弦的物理图像。F1弦所有的简并度仅仅来自于弦零能模式,一共是256个自由度。从而对应的熵是 $S = \ln 256$ 。在大 n_1 极限下,这个数字并不随 n_1 增大,所以在只考虑熵的最重要贡献时,该数可忽略。这和视界面面积为零是自洽的。

接下来我们考虑三荷黑洞解对应的简并度问题。为了简便起见,我们将 $n_5 = 1$ 。F1-P的束缚态描述的是一根长弦在 S^1 方向绕了数圈并且有 S^1 方向的动力学。对于给定的 P 的F1弦其可能的状态数并不唯一。我们感兴趣的是当 n_1, n_p 很大的时候,这些可能状态数的估计值。为此我们考虑生成这些F1-P组合的束缚态并要求左旋激发态能级为 N_L 。由于我们考虑的是BPS态,右旋能级 $N_R = 0$,也就是被固定在基态上。这些弦的激发态质量(由Level-matching条件)可以被写为

$$m^2 = \left(2\pi R n_1 T - \frac{n_p}{R}\right)^2 + 8\pi T N_L = \left(2\pi R n_1 T + \frac{n_p}{R}\right)^2 + 8\pi T N_R \quad (3.14)$$

由 $N_R = 0$ 我们可以得到

$$N_L = n_1 n_p, \quad m = 2\pi R n_1 T + \frac{n_p}{R} \quad (3.15)$$

这些谐振子同时对4个传播方向的玻色子和4个费米子自由度做拆分。由附录中的Hardy-Ramanujan公式可以得到在 $n_1, n_p \rightarrow \infty$ 时,给定能级 N_L 的简并度是

$$d \sim e^{2\pi\sqrt{\frac{c}{6}n_1 n_p}} \quad (3.16)$$

其中中心荷 c 是

$$c = 4 + 4 \times \frac{1}{2} = 6 \quad (3.17)$$

从而对应的熵为

$$S = 2\pi\sqrt{n_1 n_p} \quad (3.18)$$

这正好符合(3.13)中 $n_5 = 1$ 。

3.2 全息原理计算黑洞熵

黑洞熵和视界面的标度关系实际上给了人们一些启发。Maldacena意识到在AdS时空中的量子引力和边界上的量子场论对偶[3],这为全息原理的实现提供了一个可计算的模型。这同样也为解决高维AdS黑洞熵微观状态数问题提供了一个可行的思路。从现在的观点看,早期解决黑洞熵的模型本质上都是在AdS₃/CFT₂对偶理论下做的计算。这种方法有很大的普适性,其原因是极端黑洞的近视界面极限是AdS₂几何,而通过一些参数设置或者维度提升可以将AdS₂提升到AdS₃中,从而AdS₃/CFT₂在计算黑洞熵的问题上得到了广泛应用。另一方面,AdS₃/CFT₂比起高维的AdS/CFT有很大的简化。AdS₃没有引力的传播自由度,从而所有的动力学都由边界的引力子描述。局部上AdS₃引力还可以用定义在SO(2,2)的Chern-Simons理论描述[19]。其对偶

的共形场论和高维的共形场论也不一样，2维的共形场论有局部的无穷维Virasoro代数。这使得2维共形场论有更多可解的结构。

在AdS₃/CFT₂计算黑洞熵的方法获得成功之后，人们也尝试了在其它高维模型中用高维CFT计算理解黑洞熵。这个工作首先由[20]发起，研究了规范群为SU(N)的 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills理论是否能计算出对偶的AdS₅黑洞熵。然而当时令人们困惑的是在经典引力极限下黑洞熵的尺度是 N^2 量级，而共形场论中的超对称共形指标只有 N^0 量级增长，从而不能解释黑洞熵大量的微观状态数。第一个成功地用高维共形场论理解的AdS黑洞是AdS₄磁黑洞[21]。AdS₅黑洞熵的微观状态数问题直到2018年才获得满意的答案[22–24]。对这个问题感兴趣的读者可以参考综述[25]的相应内容。

本节将只关注AdS₃时空的量子引力，我们将说明该理论和2维共形场论的关联以及这个关联如何用于理解黑洞熵。这个关联起源于Brown和Henneaux于1986年发现[26] AdS₃的渐进对称代数是两个Virasoro代数的直和。这意味着所有的AdS₃中的量子引力都可以被视为一个二维的共形场论。利用这一点来理解所有以AdS₃为近视界面几何的黑洞的微观状态的工作是由Strominger[27]完成的。

AdS₃的Einstein-Hilbert作用量是

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left(R + \frac{2}{l^2} \right) \quad (3.19)$$

在半经典引力框架下，我们要求 $l \gg G$ ，也就是AdS的半径尺度远大于普朗克长度，从而使得量子引力的贡献可以忽略。

该理论的真空中基态解释全局AdS₃解

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.20)$$

其等距变换群是SO(2, 2)。为了定义在该时空背景下的量子理论，我们需要说明在什么边界条件下考虑激发态。边界条件的含义是度规或者场在无穷远处的发散或者衰减行为。边界条件的选取需要从物理的需求考虑。一方面如果边界条件限制太强，则会使得得到的量子场论没有非平凡的物理激发态，对应的渐进对称代数所有守恒荷为零。如果太弱，那么渐进对称代数的守恒荷会是无穷大的。因此在恰当地选取边界条件使得渐进对称代数的守恒荷是有限的数，可以得到非平凡的物理理论。

渐进AdS₃的边界条件是

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{r^2}{l^2} + \mathcal{O}(1), & g_{t\phi} &= \mathcal{O}(1), & g_{tr} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ g_{rr} &= \frac{l^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), & g_{r\phi} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), & g_{\phi\phi} &= r^2 + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

为了说明AdS₃时空的量子引力是共形场论，我们需要计算渐进对称代数。渐进代数 ξ 满足

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \quad (3.22)$$

我们将求解方程(3.22)的细节在附录中说明，从而我们可以得到渐进代数由两个函数

表示

$$\begin{aligned}
\xi^t &= l(\epsilon + \bar{\epsilon}) + \frac{l^3}{2r^2}(\partial_+^2 \epsilon + \partial_-^2 \bar{\epsilon}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \\
\xi^r &= -r(\partial_+ \epsilon + \partial_- \bar{\epsilon}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \\
\xi^\phi &= \epsilon - \bar{\epsilon} - \frac{l^2}{2r^2}(\partial_+^2 \epsilon - \partial_-^2 \bar{\epsilon}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$\epsilon(z)$ 和 $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ 都只是光锥坐标 $z = \frac{t}{l} + \phi$, $\bar{z} = \frac{t}{l} - \phi$ 的函数。将 $\epsilon(z) = e^{inz}$ 则可以获得渐进代数的Fourier模式, 从而得到

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \\
[\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \\
[L_m, \bar{L}_n] &= 0, \quad c = \frac{3\ell}{2G}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

并且中心荷 c 为

$$c = \frac{3\ell}{2G} \gg 1 \tag{3.25}$$

其中

$$\mathcal{L}(z) = \sum_n L_n e^{-inz} \tag{3.26}$$

(3.24)是共形场论中熟知的Virasoro代数。 L_n 和 \bar{L}_n 分别代表左旋模式和右旋模式。这揭示了AdS₃中的量子引力正是中心荷为 $\frac{3\ell}{2G}$ 的共形场论。

接下来我们要理解的问题是黑洞在该共形场论中应该如何解释。为了解释这个问题, 首先我们要说明的是如何去理解一个共形场论。或者说什么叫做求解一个共形场论。共形场论由于更大的对称性, 可以通过一系列算符的权重和结构系数决定。这些信息被称为共形场论的谱。求解共形场论就是求解初级算符的谱和算符乘积展开的融合规律(Fusion rule)。对于我们的例子来说, 我们需要理解黑洞的参数如何对应于共形场论的参数。

BTZ黑洞的度规是

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\Delta dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 \left(d\phi - \frac{J}{2r^2} dt \right)^2 \\
\Delta &= -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

内外视界面尺度为

$$r_{\pm}^2 = \frac{l^2}{2} \left(M \pm \sqrt{M^2 - \frac{J^2}{l^2}} \right) \tag{3.28}$$

质量和角动量可以分别表示为

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{8Gl^2}, \quad J = \frac{r_+ r_-}{4Gl} \tag{3.29}$$

对应的黑洞熵为

$$S = \frac{\pi r_+}{2G} = \pi \sqrt{\frac{l(LM+J)}{2G}} + \pi \sqrt{\frac{l(LM-J)}{2G}} \quad (3.30)$$

另一方面我们注意到度规(3.27)中 M 和 J 相关的项在边界条件中正是 $\delta g_{\mu\nu}$ 项，从而我们可以得到

$$M = \frac{1}{l}(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}), \quad J = L_0 - \bar{L}_0 \quad (3.31)$$

这意味着BTZ黑洞是边界条件(3.21)所定义的共形场论中Virasoro能级为(3.31)的量子态。在共形场论中，能级为 L_0 的态的简并度由Cardy公式计算：

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{c}{6} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right)} + 2\pi \sqrt{\frac{c}{6} \left(\bar{L}_0 - \frac{c}{24} \right)} \quad (3.32)$$

从而这正好和黑洞熵(3.30)是一致的。

最后我们需要说明如何推导Cardy公式。BTZ边界的共形场论定义在 T^2 的流形上，我们记这个流形的moduli为 τ 。从流形几何的观点看， τ 是流形的复结构。从场论的观点看， τ 和黑洞的温度相关 $\tau = i\beta$ 。定义在 T^2 的流形上的共形场论的配分函数是

$$Z[\tau, \bar{\tau}] = \text{Tr} e^{2\pi i \tau L_0} e^{-2\pi i \bar{\tau} \bar{L}_0} = \sum \rho(\Delta, \bar{\Delta}) e^{2\pi i \Delta \tau} e^{-2\pi i \bar{\Delta} \bar{\tau}} \quad (3.33)$$

其中 ρ 是量子态的简并度密度。一般我们可以用 $q = e^{2\pi i \tau}$ 作为变量来表示模形式。从而

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{dq}{q^{\Delta+1}} \frac{d\bar{q}}{\bar{q}^{\bar{\Delta}+1}} Z(\tau, \bar{\tau}) \quad (3.34)$$

定义在 T^2 的流形上的共形场论的配分函数满足模性质(这里我们只写出了 τ 部分，略去了 $\bar{\tau}$)

$$Z_0[\tau] = Z_0\left[-\frac{1}{\tau}\right], \quad Z_0[\tau, \bar{\tau}] = Z[\tau, \bar{\tau}] q^{-\frac{c}{24}} \bar{q}^{\frac{c}{24}} \quad (3.35)$$

因此

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dq}{q^{\Delta+1}} Z_0\left[-\frac{1}{\tau}\right] = \int e^{-2\pi i \tau \Delta} e^{\frac{2\pi i c}{24\tau} + \frac{2\pi i c \tau}{24}} Z\left[-\frac{1}{\tau}\right] d\tau \quad (3.36)$$

$Z[-\frac{1}{\tau}]$ 在 $\tau \rightarrow 0$ 处趋于常数，这可以理解为在高温极限下对偶的频道里，低能的算符是单位算符。我们可以用稳定点近似估计(3.36)的值。稳定点位于指数熵函数的导数为零的点。从而

$$f'(\tau) = 0, \quad f(\tau) = -\tau \Delta + \frac{c}{24\tau} + \tau \left(\frac{c}{24} \right) \quad (3.37)$$

可以解出

$$\tau = i \sqrt{\frac{c}{24\Delta}} \quad (3.38)$$

将求得的 τ 值带回(3.36)我们就获得了Cardy公式。

以上的利用共形场论推导黑洞熵的方法普适于所有有AdS₃近视界面几何的黑洞。如果我们在具体某一个弦论模型研究这个问题，我们可以计算出究竟是哪些共形场论的物理态贡献了黑洞熵。在文献[28]中，我们可以找到这样一个例子。一般说来，共形场论有很大的moduli空间，在不同的moduli点上，共形场论存在着不同的描述方

式。这些点上的共形场论可能是强耦合的，也就是说没有拉氏量的描述。在D1-D5系统中，存在着一个moduli点使得对偶的超对称共形场论有近似自由场的描述，这就是已知的 $\text{Sym}^N(T^4)$ 或者 $\text{Sym}^N(K3)$ 。这些场论存在一些扭算符(twist operator)，它们负责把在不同份的共形场论之间映射。其中存在maximally twisted sector，其将所有N份的共形场论通过twist算符粘贴起来。从而形成了长弦的物理态。黑洞熵的首阶半经典贡献正来自于这个sector的贡献。

3.3 Kerr黑洞和共形场论对偶

虽然在前文中我们介绍了如何用弦理论或者全息原理计算黑洞熵，但是我们不能回答的很直接的问题是：Schwarzschild和简单的Kerr黑洞的微观状态数是什么？虽然黑洞解比弦论中的D1-D5-P模型简单很多，但是其场论描述很困难。很遗憾的是，直到现在我们都没有获得满意的答案。在探索理解非超对称黑洞的工作中，Kerr/CFT对偶[29]是基于极端黑洞的近视界面极限是 AdS_2 几何这一事实提出的一种普适的计算方法。

Kerr/CFT的计算方法和Brown-Henneaux关于 AdS_3 的方法类似，都需要找到某个边界条件来限制量子态的Hilbert空间。由于该方法只需要黑洞是极端的，超对称不是必须条件，因此它可以被用于研究一般Kerr黑洞和带电荷黑洞的微观状态。而且在不同的维度该算法的差别不大，因此不像全息原理的办法需要分维度各个模型逐一讨论研究。近年来这种方法还被尝试推广到非极端黑洞模型中，这类研究利用了一个被称为hidden symmetry的概念。在本讲义中将不赘述。然而Kerr/CFT依然有其局限性。目前主要缺陷之一是，我们还不知道如何把Kerr/CFT嵌入到高维全息原理的框架中。例如 AdS_5 的黑洞对偶于 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills共形场论，因此其极端极限也可以被边界的4维共形场论描述。由于Kerr/CFT对偶是用一个手性共形场论描述近视界面的黑洞熵，因此我们可以推断任何对偶于存在极端极限的黑洞的共形场论都有一个手性共形场论的极限。近期的工作[30]也与这个猜想有关。然而从群论的角度来说，目前我们还无法理解：在高维场论中，物理态是有限维共形对称群的表示；而近视界面的手性代数共形对称群是无穷维的；一个有限对称群的表示如何存在一个无穷维对称群的表示，是这里面的核心问题之一。

本文将参考[29]考虑平直时空的4维Kerr黑洞。其它维度以及渐进AdS时空的Kerr/CFT对偶可见参考文献[31, 32]。Kerr黑洞的度规是

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\phi})^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}((\hat{r}^2 + a^2)d\hat{\phi} - a d\hat{t})^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} d\hat{r}^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.39)$$

$$\Delta = \hat{r}^2 - 2M\hat{r} + a^2, \quad \rho^2 = \hat{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$a = J/M$ 是角动量和质量的比值。内外视界面半径为

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.40)$$

从而极端极限是 $M = a$ ，也就意味着 $J = M^2$ 。这并非超对称所需要的的标度关系，所以这个理论计算没有超对称保护。

由前文的方法可以容易计算出，Kerr黑洞的Hawking温度和黑洞熵分别为

$$T_H = \frac{r_+ - M}{4\pi M r_+}, \quad S = 2\pi M r_+ \quad (3.41)$$

当 $M = a$ 时， $T_H = 0$ 。因此极端黑洞描述的是物理系统的基态。在极端极限下近视界面几何可以通过定义新坐标

$$r = \frac{\hat{r} - M}{\lambda M}, \quad t = \frac{\lambda \hat{t}}{2M}, \quad \phi = \hat{\phi} - \frac{\hat{t}}{2M} \quad (3.42)$$

并取 $\lambda \rightarrow 0$ 。从而我们获得被称为near horizon extremal Kerr geometry (NHEK)。

$$ds^2 = 2\Omega^2 J \left[\frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2 - r^2 dt^2 + \Lambda^2 (d\phi + r dt)^2 \right] \quad (3.43)$$

$$\Omega^2 = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad \Lambda = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}$$

文献[29]的发现是如下的边界条件可以定义非平凡的渐进代数

$$\begin{aligned} h_{tt} &= \mathcal{O}(r^2), & h_{t\phi} &= h_{\phi\phi} = \mathcal{O}(1), & h_{rr} &= \mathcal{O}(r^{-3}) \\ h_{\phi r} &= h_{\theta\theta} = h_{t\theta} = h_{\theta\phi} = \mathcal{O}(r^{-1}), & h_{tr} &= h_{\theta r} = \mathcal{O}(r^{-2}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

这个边界条件所对应的渐进代数正是Virasoro代数，并且中心荷为

$$c = 12J \quad (3.45)$$

另外，在极端极限下Hawking温度是0。受到前文关于BPS条件下热力学的讨论启发，零温的热力学教我们需要考虑

$$T_{L,R} = \frac{T_H}{\Omega \pm \Omega_0} \quad (3.46)$$

其中 Ω_0 是极端黑洞的角速度。我们可以算出

$$T_L = \frac{r_+ - M}{2\pi(r_+ - a)}, \quad T_R = \frac{r_+ - M}{2\pi \lambda r_+} \quad (3.47)$$

从而在极端极限

$$T_L = \frac{1}{2\pi} \quad T_R = 0 \quad (3.48)$$

这正符合Cardy公式计算的黑洞熵：

$$S = \frac{\pi^2}{3} c T_L = 2\pi J \quad (3.49)$$

习题

1. 利用Jacobi恒等式说明 Witt代数

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} \quad (3.50)$$

的central extension只能是Virasoro代数

2. 通过计算检查Kerr-BTZ黑洞的Kerr中心荷和Brown-Henneaux中心荷相等

4 黑洞信息佯谬

悖论(Paradox)是理论物理发展的重要驱动力。它产生于看似合理的假设通过看似合理的推论最终却导向完全矛盾的结论。理解悖论能促进我们对理论整体框架的理解和建设。根据具体悖论的内容和矛盾的严重程度,我们可以将悖论的内因分为错误(Error), 缺口(Gap)以及矛盾(Contradiction)。

错误描述的是理论本身有问题,一旦找出了这个问题就解决了悖论。例如Maxwell方程组的协变性在Galilean变换下不满足,而需要在Lorentz变换下才能保证。当我们意识到需要使用Lorentz变换来研究Maxwell方程组,我们就解决了这个问题,同时还催生了狭义相对论的发展。与之不同的是缺口型悖论。它出现在我们对理论的理解还不够完备的时候。例如Wheeler在思考黑洞时空中的热力学第二定律如何理解就是这样一个问题。这样的思考使得Bekenstein以及后继者完善了黑洞热力学,从而将黑洞理论和热力学理论结合了起来。最后一种是矛盾,这意味着我们对理论的理解本身出现了巨大错误,从而需要一场理论的革命来解决这样的问题。例如在理解氢原子的能级时,如果采用电子绕原子核旋转的引力理论中轨道的图像来理解,电子会通过电磁辐射损失能量,从而不可避免地掉入原子核中,这和客观事实不符合。量子力学成功的帮助我们理解了氢原子中能级的问题。

黑洞信息悖论更类似于一个缺口型问题。我们并不认为我们的理论中存在着矛盾,尤其在AdS/CFT出现之后,我们对黑洞蒸发过程是信息守恒的有了更多的信心。然而这对我们要理解黑洞蒸发过程到底发生了什么还是不够的。我们需要承认的是,AdS/CFT虽然通过了很多计算的检验,也有弦理论的支撑,但是目前的计算对于我们学习到解决黑洞信息悖论还是帮助有限。例如我们确实通过AdS/CFT可以计算关联函数 [33],但是这些计算完全没有能探测视界面之内的物理。我们也缺少能够用共形场论来描述黑洞形成过程的理论支持。目前更多关于黑洞的全息原理计算还是局限于计算黑洞的微观状态数。这确实是一个成功。但是这和解决信息丢失问题关系不大。要解决信息丢失问题,我们需要的是黑洞形成物理过程的细节。

4.1 Hawking定理

在本节中,我们要介绍的是Hawking定理。它说明的是:如果假设

- 量子引力效应只在Planck尺度才有明显效应
- 黑洞视界面附近没有复杂的动力学,而可以被视为普通的平直时空

那么一定会导致信息悖论问题。关于这一部分内容,比较好的参考文献有[17, 34–36]。

在之前关于弯曲时空的量子场论的章节中,我们说明了由于缺少类时的等距对称性,在弯曲时空中我们不能唯一定义真空态,从而粒子数不是一个好的物理观测量。理论中存在着不唯一的运动方程的完备正交解。每一组正交解都可以定义自己选定的类时坐标所对应的真空态:

$$\mathbf{a}_n |0\rangle_a = 0, \quad \mathbf{b}_n |0\rangle_b = 0 \quad (4.1)$$

对于 \mathbf{a}_n 参考系的观察者来说, $|0\rangle_a$ 是真空态, 但对于 \mathbf{b}_n 参考系的观察者来说, $|0\rangle_a$ 中存在着大量的可观测粒子。我们记两组解的Bogoliubov变换为:

$$\mathbf{a}_m = \sum_n \alpha_{mn} \mathbf{b}_n + \sum_n \beta_{mn} \mathbf{b}_n^\dagger \quad (4.2)$$

我们在之前的章节中利用这些Bogoliubov系数计算了 \mathbf{b} 参考系中能观察到的粒子的数目。事实上, 由于解的完备性 $|0\rangle_a$ 可以被视为 \mathbf{b} 参考系中的激发态, 从而用 \mathbf{b} 谐振子来表示。通过求解方程

$$\mathbf{a}_m |0\rangle_a = \left(\sum_n \alpha_{mn} \mathbf{b}_n + \sum_n \beta_{mn} \mathbf{b}_n^\dagger \right) |0\rangle_a = 0 \quad (4.3)$$

我们可以获得一般解为

$$|0\rangle_a = C e^{-\frac{1}{2} \sum_{m,n} \mathbf{b}_m^\dagger \gamma_{mn} \mathbf{b}_n^\dagger} |0\rangle_b \quad (4.4)$$

其中 γ 矩阵是

$$\gamma = \frac{1}{2} (\alpha^{-1} \beta + (\alpha^{-1} \beta)^T) \quad (4.5)$$

为了更好地理解两个真空态之间的关系, 我们可以考虑仅存在一个模式下的解形式

$$|0\rangle_a = C e^{-\frac{\gamma}{2} \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}^\dagger} |0\rangle_b = C |0\rangle_b + C_2 \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}^\dagger |0\rangle_b + \dots \quad (4.6)$$

这里我们需要注意的核心性质是产生的粒子是成对纠缠的。如果我们忽略高阶四个粒子生成的效应(因为更多粒子生成的概率会被压低), 这样的纠缠态可以被写成

$$|0\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2 \right) \quad (4.7)$$

接下来我们需要讨论的问题是在黑洞几何中的粒子产生效应, 在什么时空区域是最重要的。为了研究这个问题, 我们先考虑一个量子力学中的简单模型[35]。考虑量子场论中的谐振子模型

$$L = \frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \quad (4.8)$$

在经过一段时间演化后, 由于时空结构的改变, 模型变成:

$$L = \frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{1}{2} \omega'^2 a^2 \quad (4.9)$$

模型(4.8)和(4.9)分别有其自己对应的基态波函数。

如果模型转变过程是绝热的, 或者说, 波函数可以随着势能的改变而变化, 那么系统可以一直被锁定在基态。但是如果转变过程太快使得波函数来不及适应新的势能, 那么对于转变后的势能来说, 原来模型的波函数不再是基态的, 从而可以用新的势能决定的完备波函数基展开。这个展开级数中包含着多粒子态, 从而原来模型的基态不再是新的模型的基态, 新的粒子产生了。决定转变过程是否“太快”的物理量是理论中的特征尺度。在这个模型中, 我们唯一的特征尺度是 $\omega \sim \omega'$ 。因此如果转变时间 Δt 小于这个尺度, 我们将会预测到粒子产生的发生。

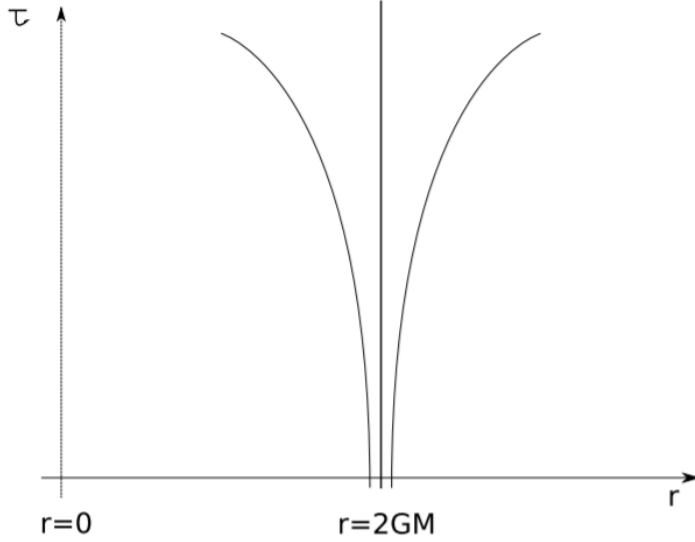


Figure 2: Figures from [35]

在黑洞时空中，类似的我们可以认为粒子产生发生在时空变化“太快”的区域，也就是 $\delta g \sim g$ 。类似的，在黑洞时空中，特征尺度为Schwarzschild半径 $\sim GM$ 。从而也就是在视界附近，粒子产生效应将变得不可忽略。事实上，由于引力源的存在，粒子产生过程总是在发生的。只不过在引力场不强的区域，这个效应很小。视界产生的粒子根据在视界附近的具体位置有不同的命运。对于视界之外的粒子，它有几率逃脱黑洞引力的范围；而视界之内的粒子会不可避免地掉入奇点，因为在视界内部，奇点的方向是无穷远的未来。

为了描述黑洞时空中粒子产生的演化过程，我们需要选取合适的类空曲面。类空曲面是指其法向量满足 $n^\mu n_\mu < 0$ 。在视界之外，Schwarzschild坐标给出了合适的类时向量 ∂_t ，我们可以选择 $t = const$ 的曲面为类空曲面。这和无穷远观察者选择一致。而在视界之内， r 成为了类时坐标，从而类空曲面为 $r = const$ 的曲面。在视界附近，我们可以选择connector曲面将二者光滑链接起来。见图3。这样的connector曲面一定存在因为Kruskal坐标光滑地覆盖了整个Schwarzschild黑洞的时空区域。

我们对这样的类空曲面做如下的时间演化。首先我们要求在视界内部的部分 S_{in} 的半径 r 变化 $\delta r \rightarrow 0$ 。这样做是为了避免 $r = 0$ 处的奇点问题。在视界之外的部分则是 t 方向进行有限的位移 $t \rightarrow t + \Delta t$ 。为了把这样的类空曲面光滑地连接起来，连接部分connector会被迫不断被拉长。从而一对对的量子纠缠粒子会在connector区域中不断地产生出来，像是时空在视界附近不断地被一层层剥离。见图4

我们需要研究的是在这个时间演化过程中，Hawking辐射的纠缠熵的变化。我们记 $|\psi\rangle$ 为黑洞的初始态。当一对纠缠粒子产生时，我们可以获得其量子态为

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_1} |0\rangle_{b_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_1} |1\rangle_{b_1} \right) \quad (4.10)$$

考虑在Hawking辐射过程中， b 粒子逃逸到了无穷远，而 c 粒子掉入黑洞成为黑洞的一

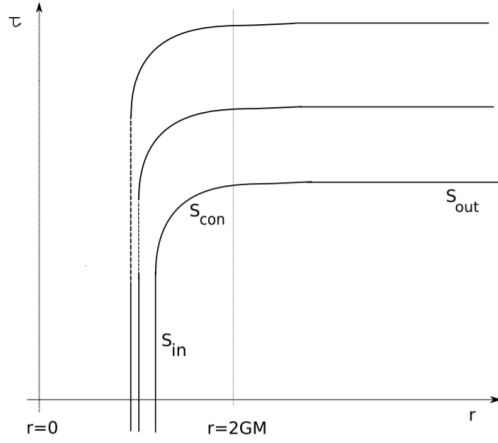


Figure 3: 图片截取于文献[34]

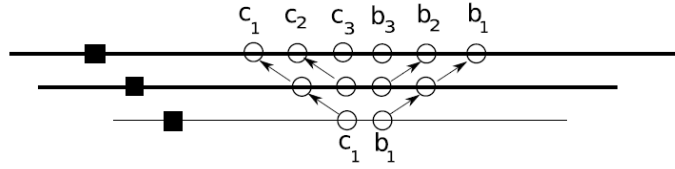


Figure 4: Figures from [34]

部分。由于引力相互作用是吸引的，在黑洞视界面内部的粒子能量为负。从而 c 粒子会减小黑洞的能量。形成的 c 和黑洞的共同系统的密度矩阵是

$$\rho_1 = \text{tr}_b |\Psi\rangle \langle \Psi| = \frac{1}{2} |\psi\rangle |0\rangle_c \langle 0|_c \langle \psi| + \frac{1}{2} |\psi\rangle |1\rangle_c \langle 1|_c \langle \psi| \quad (4.11)$$

对应的纠缠熵是

$$S = -\text{tr} \rho_1 \ln \rho_1 = \ln 2 \quad (4.12)$$

当演化继续进行时，会有更多的量子纠缠对粒子从视界面的connector附近产生。这样新的物理态可以记为

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_1} |0\rangle_{b_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_1} |1\rangle_{b_1} \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_{c_2} |0\rangle_{b_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_{c_2} |1\rangle_{b_2} \right) \quad (4.13)$$

从而Hawking辐射和剩下系统的纠缠熵为 $S = 2 \ln 2$ 。可以证明的是当 N 对纠缠粒子产生之后，无穷远的 b 系统的纠缠熵为 $S = N \ln 2$ 。

这个过程当然不可能永远进行下去。一个自然的猜测是：蒸发过程会在黑洞曲率的尺度达到Planck量级停止 $R \leq l_p^2$ 。这将导致两种可能的结果：

1. 黑洞蒸发过之后，什么都没有剩下。无穷远处的Hawking辐射粒子 b 有很大的纠缠熵，但是没有任何物理系统与之纠缠。从而发生了纯态通过黑洞蒸发变成了混合态。这违反了量子力学。

2. 存在着Planck尺度的蒸发遗迹(Remnants)。它和无穷远的Hawking辐射粒子有大量的量子纠缠但是能量尺度都很小。

第一种可能结果描述的是黑洞蒸发过程发生了信息丢失。第二种可能结果并不违反量子力学的信息守恒，但是一个几乎没有能量和尺度但是却包含大量量子纠缠的遗迹不符合人们对一般物理的理解。Hawking的计算并不能说明这两种选择哪一种更符合理论要求。

人们对黑洞信息悖论有过各种各样的误解。例如黑洞信息丢失问题源自于真空中产生的量子纠缠的粒子对。我们可以通过比较其它物理模型和物理过程来理解信息丢失是如何依赖于黑洞物理理论的。一个例子是Schwinger效应，它描述的是在两块通电板并且板之间电场为 E 的真空中可以产生粒子对。由于电板上电荷的吸引，这样的电子对可以被分开吸引到两个电板上。当源源不断电子对产生后，会中和电板上的电荷直到电场消失。这个过程没有任何信息丢失问题。信息丢失问题也不出在量子纠缠的粒子对上。根本原因是由于引力的作用，黑洞内部粒子能量为负，从而Hawking辐射会减小黑洞的质量。在Schwinger效应里，真空中的纠缠粒子对中和了电场从而中止了Schwinger过程。在电场完全消失之后，两个电板之间会存在大量的量子纠缠。然而黑洞蒸发过程会减小黑洞能量。我们无法想象一个没有能量的虚空会携带大量的量子纠缠。

还有一个常见的误解是也许Hawking的计算只是半经典引力极限下的首阶效应。当我们考虑了量子引力的所有修正我们有可能修正信息丢失问题。然而我们在下一节可以看到我们需要 $\mathcal{O}(1)$ 的修正来解决信息丢失问题。仅仅期待量子引力的修正似乎远远不够。这正是信息丢失悖论问题的难点。

4.2 CHSH计算

在上一节中，我们使用了一些简化的量子比特模型来研究黑洞的信息丢失问题。我们着重讨论了黑洞视界附近的纠缠结构，以及其是如何造成信息丢失的。在本节中，我们将使用弯曲时空的量子场论以及量子纠缠的测量来进一步定量地研究信息丢失问题。

历史上Einstein和Bohr有关量子力学发生了多次辩论。由于当时实验条件的局限性，这些辩论都大多数停留在哲学或者理论层面。Bell有关量子纠缠的思考改变了这一情况。他意识到量子纠缠是区别于经典关联的一种新的关联关系。他提出了现在被称为Bell不等式的工具来判定一个系统是否存在量子纠缠。这个理论后来由Clauser, Horne, Shimony和Holt四人改良成为了现在熟知的CHSH不等式。本文将讨论后面这一种理论。

我们记 A_1, A_2 是一个系统中的一对物理观测量， B_1, B_2 是另一个物理系统中的物理观测量。假设这些物理观测量的本征值取值于 $[-1, 1]$ ，并且 $[A_i, B_j] = 0$ 。CHSH算符被定义为

$$C_{AB} = A_1(B_1 + B_2) + A_2(B_1 - B_2) \quad (4.14)$$

在经典力学中， $|C_{AB}| \leq 2$ ，这可以通过下式证明

$$|C_{AB}| \leq |B_1 + B_2| + |B_1 - B_2| \leq 2\text{Max}\{|B_1|, |B_2|\} \leq 2 \quad (4.15)$$

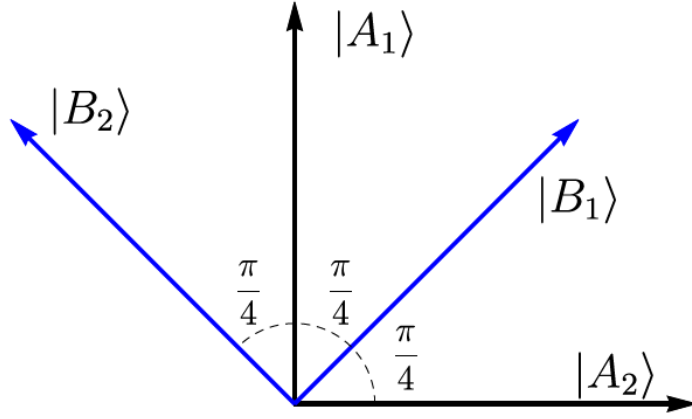


Figure 5: Figures from [36]

与之不同的是在量子力学中，Tsirelson证明了CHSH算符的期望值可以超过经典的极限，为

$$|\langle \Psi | C_{AB} | \Psi \rangle| \leq 2\sqrt{2} \quad (4.16)$$

这个值被称为Tsirelson极限。这个最大值当且仅当如下条件满足的时候取到

$$\langle B_1 | B_2 \rangle = \langle A_1 | A_2 \rangle = 0, \quad |B_1\rangle + |B_2\rangle = \sqrt{2}|A_1\rangle, \quad |B_1\rangle - |B_2\rangle = \sqrt{2}|A_2\rangle \quad (4.17)$$

其态的构型可见图5:

此外我们还需要两个有关CHSH算符的事实。其一是量子纠缠有单一性(Monogamy)。其意味着如果存在第三个系统的算符 C_1, C_2 满足 $[C_j, B_i] = [C_j, A_i] = 0$ ，那么对于任意的量子态 $|\Psi\rangle$ 都有[37]

$$\langle \Psi | C_{AB} | \Psi \rangle^2 + \langle \Psi | C_{AC} | \Psi \rangle^2 \leq 8 \quad (4.18)$$

不等式(4.18)意味着如果 AB 之间有量子纠缠 $C_{AB}^2 > 4$ 则 AC 之间不能存在量子纠缠。其二事实是如果一个子系统的密度矩阵 ρ 正比于单位矩阵，那么在补系统中一定存在算符 $B_{1,2}$ 使得 C_{AB} 满足Tsirelson's上界。

现在考虑视界面附近的量子纠缠。记 $|\Psi\rangle$ 为黑洞的物理态，则其视界面附近的产生的粒子数可以通过求解Bogoliubov方程

$$\left(\mathbf{a}_{\omega,l} - e^{-\frac{\beta\omega}{2}} \tilde{\mathbf{a}}_{\omega,l}^\dagger \right) |\Psi\rangle = 0, \quad \left(\mathbf{a}_{\omega,l}^\dagger - e^{\frac{\beta\omega}{2}} \tilde{\mathbf{a}}_{\omega,l} \right) |\Psi\rangle = 0 \quad (4.19)$$

从而计算得视界面附近的关联函数为

$$\langle \Psi | \mathbf{a}_{\omega,l} \tilde{\mathbf{a}}_{\omega,l} | \Psi \rangle = \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\omega}} \quad (4.20)$$

其中 $N_{\omega,l} = \mathbf{a}_{\omega,l}^\dagger \mathbf{a}_{\omega,l}$ 是粒子数算符，并且其本征值为 n 的本征态定义为 $|n\rangle$ 。

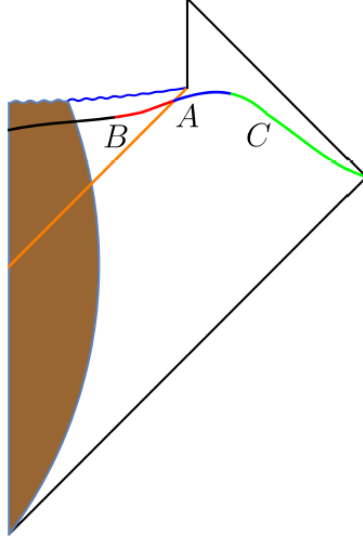


Figure 6: 图片截取于[36]

为了定量地类比于CHSH模型描述量子纠缠，我们需要在视界附近构造相应的CHSH算符。其中 A_1, A_2 定义为

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (|2n+1\rangle \langle 2n+1| - |2n\rangle \langle 2n|) \\
 A_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (|2n+1\rangle \langle 2n| + |2n\rangle \langle 2n+1|) \\
 \tilde{A}_1 &= \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} (|2\tilde{n}+1\rangle \langle 2\tilde{n}+1| - |2\tilde{n}\rangle \langle 2\tilde{n}|) \\
 \tilde{A}_2 &= \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} (|2\tilde{n}+1\rangle \langle 2\tilde{n}| + |2\tilde{n}\rangle \langle 2\tilde{n}+1|)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

而 B_1, B_2 是 $\tilde{A}_{1,2}$ 的某种线性组合

$$B_{1,2} = \cos \theta \tilde{A}_1 \pm \sin \theta \tilde{A}_2$$

我们感兴趣的是CHSH算符的上界，从而通过计算可以发现当 θ 满足

$$\tan \theta = 2 \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{1 + e^{-\beta\omega}} \tag{4.22}$$

对应的关联函数上界是

$$\langle \Psi | C_{AB} | \Psi \rangle = \frac{2}{1 + e^{-\beta\omega}} \sqrt{1 + 6e^{-\beta\omega} + e^{-2\beta\omega}} \tag{4.23}$$

考虑一个黑洞经过Hawking辐射的蒸发过程：我们把区域 A 定义为近视界面的晚期Hawking辐射， B 是视界内部， C 是早期霍金辐射。由于Hawking辐射是热谱，

从而其密度矩阵正比于单位算符，因此对于 A, C 作为一个整体系统来说， C 系统中可以找到算符 C_1, C_2 来保证

$$\langle \Psi | C_{AC} | \Psi \rangle = 2\sqrt{2} \quad (4.24)$$

这导致

$$\langle \Psi | C_{AB} | \Psi \rangle^2 + \langle \Psi | C_{AC} | \Psi \rangle^2 > 8 \quad (4.25)$$

违反了(4.18)。

为了解决这个问题，一种可能是 A 和 B 之间没有量子纠缠。有两种可能的模型都有这样的特性。第一种是火墙模型[38]：该模型认为黑洞的近视界面几何和传统意义的黑洞几何没有区别，只是视界面外的模式和视界面内的模式没有量子纠缠，取而代之的是Planck能标的激发粒子，也就是火墙。第二种模型是毛球模型。毛球模型放弃的是黑洞存在视界面内部的概念，取而代之的是量子引力尺度的效应会体现在宏观的对应于微观状态的几何上。值得说明的是，在AdS/CFT中，火墙问题可以被很自然地解决[39]。其原因是AdS-Schwarzschild双边黑洞对偶于Thermal field double state，而黑洞视界面内的模式是被编码在第二个边界的共形场论中，从而黑洞的霍金辐射 A 同时和早期霍金辐射 C 还有视界面内模式 B 进行量子纠缠就不会有任何矛盾。

最后我们简要介绍一下毛球模型。一个毛球模型的几何的大致形式是：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{\sqrt{g_1 g_5}} [-(dt - A_i dx^i)^2 + (dy + B_i dx^i)^2] + \sqrt{g_1 g_5} \sum_{i=1}^4 dx_i^2 \\ g_1(\vec{x}) &= 1 + \frac{Q_5}{L} \int_0^L \frac{|\dot{\vec{F}}(v)|^2 dv}{|\vec{x} - \vec{F}(v)|^2} \\ g_5(\vec{x}) &= 1 + \frac{Q_5}{L} \int_0^L \frac{dv}{|\vec{x} - \vec{F}(v)|^2} \\ A_i(\vec{x}) &= -\frac{Q_5}{L} \int_0^L \frac{\dot{F}_i(v) dv}{|\vec{x} - \vec{F}(v)|^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

几何度规(4.26)是10维超引力作用量[40]

$$S = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\Phi} (R + 4(\nabla\Phi)^2) - \frac{1}{2(p+2)!} F_{p+2}^2 \right] \quad (4.27)$$

的稳定点解。不难可以通过mathematica算出运动方程

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi &= \frac{e^{2\Phi}}{2(p+1)!} \left[F_{\mu\nu}^2 - \frac{g_\mu}{2(p+2)} F^2 \right] \\ d * F_{p+2} &= 0, \quad R = 4(\nabla\Phi)^2 - 4\Box\Phi \end{aligned} \quad (4.28)$$

这里 $\vec{F}(v)$ 是弦的形态函数，它只和光锥坐标 $v = t - y$ 有关。直接求解Einstein方程(4.28)来获得Fuzzball解(4.26)是十分困难的。一般可以用生成解的方法从chiral null模型来获得这些Fuzzball解[41]。

在Fuzzball项目的研究中，人们认为存在大量的微观状态度规(4.26)，通过不同的弦的形态函数 $\vec{F}(v)$ 来区分，从而这些几何能够给出宏观的黑洞熵。这些fuzzball几何都是没有视界面的几何，从而不会发生任何信息丢失问题。这些不同弦的形态函

数 $\vec{F}(\vec{v})$ 可以展开成为Fourier空间的级数。这些级数的系数对偶于微观状态的生成算符。一个经常会产生的误解是任意一个给定的弦形态函数对偶于一个场论中的微观状态。这几乎不正确[42, 43]。只有当弦形态函数描述的是圆时fuzzball几何才对偶于一个场论中的微观态。而对于一般的形态，fuzzball对偶的是各个微观状态的叠加。

5 前沿与讨论

由于课程长度限制以及讲义内容有限，本讲义只涉及了有关黑洞熵计算的很有限的部分。近年来，在研究利用高维共形场论解决黑洞熵问题上取得了突破性进展。这样的研究尝试从2005年就开始进行了[20]。简单地想，大尺度的AdS₅黑洞的熵是 $L^3 \sim N^2$ 量级的。然而[20]用超对称共形指标计算对偶 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills理论却得到在大 N 极限下首阶的共形指标是 N^0 量级的。这意味着超对称共形指标不能计算出黑洞熵，但是却能很好地描述巨引力子(Giant graviton)的性质。

已知的最一般满足BPS性质的AdS₅黑洞最早由[15]给出，其具有三个电荷和两个角动量。熵对于这些电荷和角动量的依赖关系是

$$S = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3 - \frac{N^2}{2}(J_a + J_b)} \quad (5.1)$$

一直以来从 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills理论推导出(5.1)是一个十分困难的问题。一个猜测是，由于超对称共形指标的定义会导致玻色自由度和费米自由度发生大量抵消，从而超对称共形指标不能给出量级为 N^2 的黑洞熵。突破性进展发生在2017年，Zaffroni和他的合作者意识到了为了计算出黑洞熵(5.1)，我们只需要证明 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills理论的配分函数是

$$\ln Z = \frac{N^2}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}{\omega_a \omega_b} \quad (5.2)$$

其中 $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \omega_a - \omega_b = 2\pi i$ 。黑洞熵(5.1)可以通过对(5.2)做逆Legendre变换来得到。(5.2)在 $\mathcal{N} = 1$ 超对称场论中和超对称Casimir能量形式几乎一样[44]，除了化学势的约束条件是 $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \omega_a - \omega_b = 0$ 。因此(5.2)也被称为广义超对称Casimir能量。这启发了[23]人们构建从共形指标来计算(5.2)的方法。

在近两年的努力下，我们已经掌握了多种方法从对偶的超对称共形场论计算大 N 极限的超对称共形指标，这些结果都能用来计算不同模型下的黑洞熵。文献[25]提供了一个很好的综述。然而计算(5.2)经常需要具体的高维共形场论模型，而非找到某种共形场论的普适性质。相比之下[27]，AdS₃时空黑洞熵的微观状态不太需要理论的具体信息。唯一需要的输入是2维共形场论满足SL(2, \mathbb{Z})模性质(3.35)。如果考虑某一具体的场论，这样的配分函数将由Jacobi- θ 函数构成，其满足

$$\theta\left(\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) = e^{i\pi B_2(z, \tau)} \theta(z; \tau) \quad (5.3)$$

一般说来，黑洞主导的参数区间是 $\tau \rightarrow 0$ 的高温极限。(5.3)变换关系使得我们能够将理论的高温极限和低温极限建立非平凡的联系。从对偶的低温极限看，理论的最主

要贡献来自于单位算符。从而模形式的具体函数形式对于推导Cardy公式并不重要，重要的只有模性质以及低温极限由单位算符主导。我们在Cardy极限下将对偶频道的 θ 函数平凡化成了1从而只有 B_2 项贡献了黑洞熵的主要部分。

我们可以类似地在4维共形场论中用 $SL(3, \mathbb{Z})$ 模性质来平凡化配分函数的对偶频道。目前我们并不能在一般的理论中做到这一点。在 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills理论中，配分函数由椭圆Gamma函数构成，其满足一个非平凡的 $SL(3, \mathbb{Z})$ 模性质

$$\Gamma(z; \tau, \sigma) = e^{-i\pi Q(z; \tau, \sigma)} \frac{\Gamma\left(\frac{z}{\tau}; \frac{\sigma}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{z-\tau}{\sigma}; -\frac{\tau}{\sigma}, -\frac{1}{\sigma}\right)} \quad (5.4)$$

其中 Q -多项式是

$$Q(z; \tau, \sigma) = \frac{z^3}{3\tau\sigma} - \frac{\tau + \sigma - 1}{2\tau\sigma} z^2 + \frac{\tau^2 + \sigma^2 + 3\tau\sigma - 3\tau - 3\sigma + 1}{6\tau\sigma} z + \frac{1}{12}(\tau + \sigma - 1)(\tau^{-1} + \sigma^{-1} - 1). \quad (5.5)$$

在广义Cardy极限下，我们可以令 $\tau, \sigma \rightarrow 0$ 从而使得(5.4)右边退化成仅包含量子反常多项式。在配分函数中，当我们收集了所有的量子反常多项式综合起来，可以得到我们期待的配分函数(5.2)。换句话说，类似于Cardy在2维共形场论中的工作，在4维超对称共形场论我们依然有可能利用更一般的模性质来理解黑洞熵[45]。在未来的工作中，我们希望这个方法能够被推广到更一般的缺乏超对称的共形场论中。我们需要理解的是， $SL(3, \mathbb{Z})$ 模性质究竟依赖于什么几何性质。

最后值得一提的是除了我们提及的弦理论，全息原理，Kerr/CFT对偶以及超对称共形指标的计算之外，还存在着一种被称为Cardy-Verlinde的方法计算黑洞熵[46]。基本想法是高维的AdS黑洞熵可能存在着类似于Cardy公式类似的形式，从而预示着微观共形场论可能在高温极限存在非平凡的普适性。蔡荣根[47, 48]和荆继良老师[49]在推广该方法上做过许多工作。需要注意的是到目前为止，所有的可以用共形场论或者弦理论理解的黑洞熵模型都无法和Cardy-Verlinde公式产生任何联系。作者在这个问题有一些初步的研究。对此公式是否存在真正的共形场论解释，作者持怀疑态度。

A 数学基础

本节提供一些必要的数学基础。

A.1 Hardy-Ramanujan公式

假设 $p(n)$ 函数代表给定正整数 n 的所有不排序的拆分方法的总数。以 $n = 5$ 为例，

它可以被拆分为：

$$\begin{aligned}
5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + 2 \\
&= 1 + 1 + 3 \\
&= 1 + 4 \\
&= 2 + 3 \\
&= 1 + 2 + 2 \\
&= 5
\end{aligned} \tag{A.1}$$

There are in total seven different ways of partitioning 5. Thus $p(5) = 7$. Introducing the generating function with $p(n)$ as the coefficient.

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n + q^{2n} + \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \tag{A.2}$$

In addition, the pentagonal number theorem due to Euler says

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{g_k}, \quad g_k = \frac{k(3k-1)}{2} \tag{A.3}$$

A.2 特殊函数

Jacobi- θ 函数

定义 $(x; q) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - xq^j)$, Jacobi- θ 定义为

$$\theta(z, \tau) = ie^{\pi i(\tau/4 - z)} (x; q) \left(\frac{q}{x}; q \right) (q; q)$$

在一般的 $SL(2, \mathbb{Z})$ 变换下, Jacobi- θ 函数满足

$$\theta\left(\frac{z}{c\tau + d}; \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = e^{i\pi B(z, \tau; a, b, c, d)} \theta(z; \tau) \tag{A.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
B(z, \tau; a, b, c, d) &= \frac{cz^2}{c\tau + d} + z \left(\frac{1}{c\tau + d} - 1 \right) + \frac{c\tau^2}{6(c\tau + d)} \\
&+ \frac{c(3 - 6d) + 6(-1 + d)d + b(-2 + 3c^2 - 6cd + 3d^2)}{12(c\tau + d)} \\
&+ \frac{(-2a + 3(-2 + a)c^2 - d - 6(-1 + a)cd + 3ad^2)\tau}{12(c\tau + d)} + \delta(a, b, c, d),
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$\delta(a, b, c, d)$ 是只依赖于 $SL(2, \mathbb{Z})$ 群变换元素的值。具体定义可见[50]。

椭圆 Γ 函数

为了定义椭圆 Γ 函数，我们需要定义如下记号

$$(x : q, r) = \prod_{j,k=0}^{\infty} (1 - xq^j r^k) = \exp \left[- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l(1-q^l)(1-r^l)} \right]$$

椭圆 Γ 函数定义为

$$\Gamma(z, \tau, \sigma) = \frac{(qr/x; q, r)}{(x; q, r)} \quad (\text{A.6})$$

其中 $q = e^{2\pi i \tau}$, $r = e^{2\pi i \sigma}$, $x = e^{2\pi i z}$ 。

A.3 稳定点近似

在我们研究量子场论的时候，我们会考虑一个精确可解的模型并把高阶耦合项做微扰处理。例如带质量的标量场加入高阶耦合常数 $\lambda\phi^4$ 项。这样得到的配分函数一般来说是渐近级数。渐近级数是洛朗级数的推广。我们记 $f(x) \ll g(x)$, $x \rightarrow x_0$ 当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{A.7})$$

同时我们记 $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$ 当且仅当

$$f(x) - g(x) \ll g(x), \quad x \rightarrow x_0 \quad (\text{A.8})$$

这等价于

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (\text{A.9})$$

Laplace积分

我们考虑一类积分

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt \quad (\text{A.10})$$

我们想计算 $I(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 的渐进行为。

- 如果对于任意 $a \leq t \leq b$, $\phi'(t) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{x} \int_a^b \frac{f(t)}{\phi'(t)} \frac{d}{dt} [e^{x\phi(t)}] dt \\ &= \frac{1}{x} \frac{f(b)}{\phi'(b)} e^{x\phi(b)} - \frac{1}{x} \frac{f(a)}{\phi'(a)} e^{x\phi(a)} - \frac{1}{x} \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\frac{f(t)}{\phi'(t)} \right] e^{x\phi(t)} dt \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

可以证明最后一项在 $x \rightarrow +\infty$ 是可忽略的。因此

$$I(x) \sim \frac{1}{x} \frac{f(b)}{\phi'(b)} e^{x\phi(b)} - \frac{1}{x} \frac{f(a)}{\phi'(a)} e^{x\phi(a)} \quad (\text{A.12})$$

如果 $\text{Re } \phi(t) < \text{Re } \phi(b)$, 则

$$I(x) \sim \frac{1}{x} \frac{f(b)}{\phi'(b)} e^{x\phi(b)} \quad (\text{A.13})$$

- 如果存在在区间 $[a, b]$ 稳定点 c 使得 $\phi'(c) = 0$ 并且 $f(c) \neq 0$, 且 $\phi(t)$ 在 $t = c$ 达到最大, 则

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \frac{1}{2}(t - c)^2 \phi''(c) \quad (\text{A.14})$$

从而

$$I(x) \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c) e^{x[\phi(c) + \frac{1}{2}(t-c)^2 \phi''(c)]} dt \sim \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}} \quad (\text{A.15})$$

如果 c 是高阶稳定点, 满足

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \frac{1}{p!}(t - c)^p \phi^{(p)}(c) \quad (\text{A.16})$$

那么Laplace积分的首阶贡献为

$$I(x) \sim \frac{2\Gamma(p^{-1})(p!)^{1/p}}{p[-x\phi^{(p)}(c)]^{1/p}} f(c) e^{x\phi(c)} \quad (\text{A.17})$$

我们来考虑两个例子来理解稳定点近似的应用。考虑如下积分

$$I(a, b) = \int_0^\infty dx e^{-a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2}} \quad (\text{A.18})$$

可以计算出

$$I(a, b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab} \quad (\text{A.19})$$

(提示: 可以计算 $\partial_b I(a, b)$ 并将其表示成 $I(a, b)$ 从而获得关于 $I(a, b)$ 的一阶微分方程。) 如果我们使用稳定点近似, 稳定点方程是

$$-2a^2 x + 2\frac{b^2}{x^3} = 0 \quad (\text{A.20})$$

解是 $x_0^2 = b/a$ 。从而带入积分核可以获得

$$I(a, b) \sim e^{-2ab} \quad (\text{A.21})$$

进一步我们可以考虑一圈修正。一圈修正是定义在稳定点 x_0 附近的微扰, 我们可以记

$$x = x_0 + u \quad (\text{A.22})$$

从而

$$a^2 x^2 + \frac{b^2}{x^2} = 2ab + 4a^2 u^2 \quad (\text{A.23})$$

所以

$$I(a, b) \sim e^{-2ab} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-4a^2 u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab} \quad (\text{A.24})$$

这和精确计算的结果完全吻合!

第二个例子是 λx^4 理论的0维量子场论。这个例子详细讨论可见[51]。考虑积分

$$Z[\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 - \lambda x^4} \quad (\text{A.25})$$

这个积分的精确值是

$$Z[\lambda] = \frac{e^{\frac{1}{8\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\lambda}\right) \quad (\text{A.26})$$

微扰计算可以得到

$$Z[\lambda] = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \frac{(-\lambda)^k (4k)!}{2^{4k} (2k)! k!} \quad (\text{A.27})$$

微扰计算和真实的数值计算在微扰阶数比较大的时候会差别较大。造成这个现象的原因是，微扰计算不能告诉我们存在非微扰的稳定点。为了看到这个，我们可以定义 $u^2 = \lambda x^2$, 从而

$$Z[\lambda] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int du e^{-\frac{u^2+u^4}{\lambda}} \quad (\text{A.28})$$

我们发现当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，首阶贡献除了 $u = 0$ 稳定点外还存在瞬子稳定点 $u = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ 。正是这些稳定点贡献了 $e^{\frac{1}{4\lambda}}$ 的非微扰项。

A.4 求解渐进代数方程

在本节我们将提供计算方程(3.22)的具体步骤细节。为了方便起见，我们讨论光锥坐标系下的渐进AdS₃度规

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2} dz d\bar{z} + \frac{\ell^2 dr^2}{r^2} + h_{zz} dz^2 + h_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}^2 \quad (\text{A.29})$$

B 一些习题解答

在本节作者将提供如何从一个AdS黑洞出发计算其Euclidean配分函数的首阶贡献。本部分的计算截取于[52]。AdS黑洞解的度规是(2.57)。我们首先通过Euclidean度规在近视界面极限没有奇异点可以推导出

$$\beta = \frac{4\pi\ell^2 r_+}{3r_+^2 + \ell^2} \quad (\text{B.1})$$

我们首先可以说明Einstein-Hilbert作用量所对应的Hawking-Gibbons边界项贡献为零。AdS时空的边界位于无穷远的径向方向。为了计算方便，我们取 $r = R$ 的截断曲面。我们会在最后取 $R \rightarrow \infty$ 。在此曲面上的诱导度规满足

$$\sqrt{h} = R^2 \sin \theta \sqrt{1 - \frac{2GM}{R} + \frac{R^2}{\ell^2}} \quad (\text{B.2})$$

因此边界项积分可以被形式上写成

$$\begin{aligned} \int K \sqrt{h} d^3 x &= \frac{\partial}{\partial n} \int \sqrt{-h} d^3 x \\ &= \sqrt{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \sqrt{f(r)}) d\theta d\tau d\phi|_{r=R} \\ &= \int d\tau (8\pi R + \frac{12\pi R^2}{\ell^2} - 12\pi GM) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

而AdS背景时空的外曲率可以计算得

$$K^0\sqrt{h} = \left(2R + \frac{3R^3}{\ell^2}\right)\sqrt{1 - \frac{2GM\ell^2}{R(R^2 + \ell^2)}}\sin\theta \quad (\text{B.4})$$

易得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int (K - K^0)\sqrt{h}d^3x \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \rightarrow 0 \quad (\text{B.5})$$

接下来考虑Einstein-Hilbert作用量的体积项。由Einstein方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \Lambda = -\frac{3}{\ell^2}$$

可得 $R = 4\Lambda$ 。从而体积积分变成

$$I = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x (2\Lambda)\sqrt{g} = \frac{2\pi r_+(R^3 - r_+^3)}{G(3r_+^2 + \ell^2)} \quad (\text{B.6})$$

和边界项类似，体积积分是关于边界截断半径 $R \rightarrow \infty$ 发散的。我们需要通过重整化减去AdS时空背景的贡献来获得有限的AdS黑洞的作用量。为此我们需要选取合适的AdS时空中时间方向的周期。选取的原则是我们要求在AdS截断面上线元的长度和AdS黑洞中在截断面线元的长度一致。这意味着

$$\left(\frac{\beta_{\text{AdS}}}{\beta_{\text{BH}}}\right)^2 = 1 - \frac{2GM\ell^2}{R(R^2 + \ell^2)} \quad (\text{B.7})$$

从而

$$R^3(\beta_{\text{AdS}} - \beta_{\text{BH}}) = \ell^2 GM + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \quad (\text{B.8})$$

这使得我们可以计算出

$$I = \frac{\pi r_+^2(\ell^2 - r_+^2)}{G(3r_+^2 + \ell^2)} \quad (\text{B.9})$$

References

- [1] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199–220. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)].
- [2] R. Bousso, “The Holographic principle,” *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 825–874, [arXiv:hep-th/0203101](#).
- [3] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113–1133, [arXiv:hep-th/9711200](#).
- [4] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2, 1984.

- [5] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995.
- [6] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 7, 2019.
- [7] S. W. Hawking, “Gravitational radiation from colliding black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 1344–1346.
- [8] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161–170.
- [9] X. O. Camanho, *Lovelock gravity, black holes and holography*. PhD thesis, Santiago de Compostela U., 2013. [arXiv:1509.08129 \[hep-th\]](#).
- [10] G. W. Gibbons, M. J. Perry, and C. N. Pope, “The First law of thermodynamics for Kerr-anti-de Sitter black holes,” *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 1503–1526, [arXiv:hep-th/0408217 \[hep-th\]](#).
- [11] Z. W. Chong, M. Cvetič, H. Lu, and C. N. Pope, “General non-extremal rotating black holes in minimal five-dimensional gauged supergravity,” *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 161301, [arXiv:hep-th/0506029 \[hep-th\]](#).
- [12] Z. W. Chong, M. Cvetič, H. Lu, and C. N. Pope, “Five-dimensional gauged supergravity black holes with independent rotation parameters,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 041901, [arXiv:hep-th/0505112 \[hep-th\]](#).
- [13] S. W. Hawking, G. T. Horowitz, and S. F. Ross, “Entropy, Area, and black hole pairs,” *Phys. Rev. D* **51** (1995) 4302–4314, [arXiv:gr-qc/9409013](#).
- [14] P. J. Silva, “Thermodynamics at the BPS bound for Black Holes in AdS,” *JHEP* **10** (2006) 022, [arXiv:hep-th/0607056](#).
- [15] H. K. Kunduri, J. Lucietti, and H. S. Reall, “Supersymmetric multi-charge AdS(5) black holes,” *JHEP* **04** (2006) 036, [arXiv:hep-th/0601156](#).
- [16] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,” *Phys. Lett. B* **379** (1996) 99–104, [arXiv:hep-th/9601029](#).
- [17] S. D. Mathur, “The Fuzzball proposal for black holes: An Elementary review,” *Fortsch. Phys.* **53** (2005) 793–827, [arXiv:hep-th/0502050](#).
- [18] E. Kiritsis, *String theory in a nutshell*. Princeton University Press, USA, 2019.
- [19] E. Witten, “(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System,” *Nucl. Phys. B* **311** (1988) 46.

- [20] J. Kinney, J. M. Maldacena, S. Minwalla, and S. Raju, “An Index for 4 dimensional super conformal theories,” *Commun. Math. Phys.* **275** (2007) 209–254, [arXiv:hep-th/0510251](#).
- [21] F. Benini, K. Hristov, and A. Zaffaroni, “Black hole microstates in AdS₄ from supersymmetric localization,” *JHEP* **05** (2016) 054, [arXiv:1511.04085 \[hep-th\]](#).
- [22] S. Choi, J. Kim, S. Kim, and J. Nahmgoong, “Large AdS black holes from QFT,” [arXiv:1810.12067 \[hep-th\]](#).
- [23] A. Cabo-Bizet, D. Cassani, D. Martelli, and S. Murthy, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy of supersymmetric AdS₅ black holes,” *JHEP* **10** (2019) 062, [arXiv:1810.11442 \[hep-th\]](#).
- [24] F. Benini and P. Milan, “Black Holes in 4D $\mathcal{N}=4$ Super-Yang-Mills Field Theory,” *Phys. Rev. X* **10** (2020) no. 2, 021037, [arXiv:1812.09613 \[hep-th\]](#).
- [25] A. Zaffaroni, “AdS black holes, holography and localization,” *Living Rev. Rel.* **23** (2020) no. 1, 2, [arXiv:1902.07176 \[hep-th\]](#).
- [26] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207–226.
- [27] A. Strominger, “Black hole entropy from near horizon microstates,” *JHEP* **02** (1998) 009, [arXiv:hep-th/9712251](#).
- [28] J. R. David, G. Mandal, and S. R. Wadia, “Microscopic formulation of black holes in string theory,” *Phys. Rept.* **369** (2002) 549–686, [arXiv:hep-th/0203048](#).
- [29] M. Guica, T. Hartman, W. Song, and A. Strominger, “The Kerr/CFT Correspondence,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 124008, [arXiv:0809.4266 \[hep-th\]](#).
- [30] A. Ghosh, H. Maxfield, and G. J. Turiaci, “A universal Schwarzian sector in two-dimensional conformal field theories,” *JHEP* **05** (2020) 104, [arXiv:1912.07654 \[hep-th\]](#).
- [31] H. Lu, J. Mei, and C. N. Pope, “Kerr/CFT Correspondence in Diverse Dimensions,” *JHEP* **04** (2009) 054, [arXiv:0811.2225 \[hep-th\]](#).
- [32] D. D. K. Chow, M. Cvetič, H. Lu, and C. N. Pope, “Extremal Black Hole/CFT Correspondence in (Gauged) Supergravities,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084018, [arXiv:0812.2918 \[hep-th\]](#).
- [33] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291, [arXiv:hep-th/9802150](#).

- [34] S. D. Mathur, “The Information paradox: A Pedagogical introduction,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224001, [arXiv:0909.1038 \[hep-th\]](#).
- [35] S. D. Mathur, “What Exactly is the Information Paradox?,” *Lect. Notes Phys.* **769** (2009) 3–48, [arXiv:0803.2030 \[hep-th\]](#).
- [36] S. Raju, “Lessons from the Information Paradox,” [arXiv:2012.05770 \[hep-th\]](#).
- [37] B. Toner and F. Verstraete, “Monogamy of bell correlations and tsirelson’s bound,” *arXiv: Quantum Physics* (2006) .
- [38] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, and J. Sully, “Black Holes: Complementarity or Firewalls?,” *JHEP* **02** (2013) 062, [arXiv:1207.3123 \[hep-th\]](#).
- [39] G. Penington, “Entanglement Wedge Reconstruction and the Information Paradox,” *JHEP* **09** (2020) 002, [arXiv:1905.08255 \[hep-th\]](#).
- [40] E. Kiritsis, *String theory in a nutshell*. Princeton University Press, USA, 2019.
- [41] O. Lunin and S. D. Mathur, “Metric of the multiply wound rotating string,” *Nucl. Phys. B* **610** (2001) 49–76, [arXiv:hep-th/0105136](#).
- [42] K. Skenderis and M. Taylor, “Fuzzball solutions and D1-D5 microstates,” *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 071601, [arXiv:hep-th/0609154](#).
- [43] I. Kanitscheider, K. Skenderis, and M. Taylor, “Holographic anatomy of fuzzballs,” *JHEP* **04** (2007) 023, [arXiv:hep-th/0611171](#).
- [44] B. Assel, D. Cassani, and D. Martelli, “Localization on Hopf surfaces,” *JHEP* **08** (2014) 123, [arXiv:1405.5144 \[hep-th\]](#).
- [45] K. Goldstein, V. Jejjala, Y. Lei, S. van Leuven, and W. Li, “Residues, modularity, and the Cardy limit of the 4d $\mathcal{N} = 4$ superconformal index,” *JHEP* **04** (2021) 216, [arXiv:2011.06605 \[hep-th\]](#).
- [46] E. P. Verlinde, “On the holographic principle in a radiation dominated universe,” [arXiv:hep-th/0008140](#).
- [47] R.-G. Cai, “The Cardy-Verlinde formula and AdS black holes,” *Phys. Rev. D* **63** (2001) 124018, [arXiv:hep-th/0102113 \[hep-th\]](#).
- [48] R.-G. Cai, L.-M. Cao, and D.-W. Pang, “Thermodynamics of dual CFTs for Kerr-AdS black holes,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 044009, [arXiv:hep-th/0505133](#).
- [49] J.-l. Jing, “Cardy-Verlinde formula and entropy bounds in Kerr-Newman AdS(4) / dS(4) black hole backgrounds,” *Phys. Rev. D* **66** (2002) 024002, [arXiv:hep-th/0201247](#).

- [50] V. Jejjala, Y. Lei, S. van Leuven, and W. Li, “ $SL(3, \mathbb{Z})$ Modularity and New Cardy Limits of the $\mathcal{N} = 4$ Superconformal Index,” [arXiv:2104.07030](#) [[hep-th](#)].
- [51] M. Flory, R. C. Helling, and C. Sluka, “How I Learned to Stop Worrying and Love QFT,” [arXiv:1201.2714](#) [[math-ph](#)].
- [52] Y. Lei, “Fundamentals of Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Path integral methods,” Master’s thesis, Durham University, United Kingdom, 2012.